



## 12. cvičení – Hilbertovy prostory

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

### Teorie

**Definice 1.** Nechť  $H$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{C}$ . Řekneme, že  $H$  je prostor se skalárním součinem, pokud každé dvojici  $x, y \in H$  lze přiřadit komplexní číslo  $\langle x, y \rangle$  (nazývané skalární součin  $x$  a  $y$ ) tak, že platí

- (i)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ,
- (ii)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ,  $x, y, z \in H$ ,
- (iii)  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ ,  $x, y \in H$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,
- (iv)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,  $x \in H$ ,
- (iv)  $\langle x, x \rangle = 0$  právě tehdy, když  $x = 0$ .

**Poznámka 2.** Norma v normovaném lineárním prostoru je vytvořena skalárním součinem pomocí vztahu

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

právě když splňuje rovnoběžníkové pravidlo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

**Poznámka 3.** • Prostor  $l^2$  je prostor takových (reálných) posloupností, pro které platí  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ . Skalární součin definujeme jako

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

- Nechť  $(X, \mu)$  je měřitelný prostor. Prostor  $L^2(X)$  je prostor takových (reálných) funkcí, pro které platí  $\int_X |f|^2 d\mu < \infty$ . Skalární součin je dán vztahem

$$\langle f, g \rangle := \int_X f g d\mu.$$



## Ortogonalizace

Na začátku řešení úlohy nalezneme nějakou bázi konečně-dimenzionálního prostoru  $Y$ . Dále pak pomocí ortogonalizačního procesu nalezneme bázi ortonormální. Konkrétně, je-li  $\{f_1, \dots, f_n\}$  báží prostoru  $Y$ , položíme

$$e_1 := \frac{f_1}{\|f_1\|}, \quad e_{k+1} := \frac{f_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle f_{k+1}, e_i \rangle e_i}{\|f_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle f_{k+1}, e_i \rangle e_i\|} \quad \text{pro } k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Pak je snadné ověřit, že  $\{e_1, \dots, e_n\}$  je ortonormální báží prostoru  $Y$ . Vzorec pro ortogonální projekci  $P_Y$  je dán předpisem

$$P_Y x := \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

a bod  $P_Y x_0$  je nejbližším bodem v  $Y$  k bodu  $x_0$ .

Zdroj: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf>

## Hinty

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$$

## Příklady

- Rozhodněte, zda následující normy na daných prostorech jsou vytvořeny skalárním součinem:
  - Prostor  $C[a, b]$  s normou definovanou vztahem  $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$
  - Norma  $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$  na prostoru  $\ell^1$
  - Norma  $\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$  na  $\mathbb{R}^n$
- V následujících příkladech je dán Hilbertův prostor  $H$ , jeho uzavřený podprostor  $Y$  a bod  $x_0 \in H$ . Najděte nějakou ortonormální bázi  $Y$  a určete nejbližší bod v  $Y$  k bodu  $x_0$ .
  - $H = L^2([-1, 1])$ ,  $Y$  je podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 1,  $x_0(t) = \cos t$ ;
  - $H = \ell^2$ ,  $Y$  je lineární obal množiny  $\{(2^{-n})_{n=1}^{\infty}, (3^{-n})_{n=1}^{\infty}\}$ ,  $x_0 = (1, 0, 0, \dots)$ ;
  - $H = L^2([0, 1], t dt)$ ,  $Y$  je lineární obal množiny  $\{1, t^2\}$ ,  $x_0(t) = t$ ;
  - $H = L^2((0, \infty), e^{-t} dt)$ ,  $Y$  je lineární obal množiny  $\{1, e^{-2t}\}$ ,  $x_0(t) = e^{-3t}$ ;
  - $H = L^2([-1, 1])$ ,  $Y$  je podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2,  $x_0(t) = \sin t$ ;



3. Necht' je v Hilbertově prostoru  $L^2(-1, 1)$  dána funkce  $f(x) = x$ . Popište  $f^\perp$  a nalezněte nějakou nenulovou funkci  $g$ , která patří do  $f^\perp$ .
4. Necht' je v Hilbertově prostoru  $L^2(-1, 1)$  dán podprostor  $Y = \{f \in L^2(-1, 1) : f \text{ je lichá funkce}\}$ . Nalezněte  $Y^\perp$ .
5. Ukažte, že

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)] dt$$

je skalární součin na  $C^1[a, b]$ , tj. na množině funkcí majících spojitou derivaci.

6. Ukažte, že posloupnost

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \dots \right\}$$

tvoří ortonormální bázi prostoru  $L^2[-\pi, \pi]$  se skalárním součinem  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} fg \, dx$ . (Maximalitu systému nedokazujte.)

Odvod'te Fourierovy koeficienty funkce  $f \in L^2[-\pi, \pi]$  v této bázi.

- 7.♥ Necht'  $\ell_0^2$  je prostor všech komplexních posloupností, které mají konečně mnoho nenulových prvků. Na tomto prostoru uvažujme skalární součin  $\langle \{a_k\}, \{b_k\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$ . Dokažte, že  $\ell_0^2$  s tímto skalárním součinem není Hilbertův prostor.
- 8.\* Dokažte, že operace  $\langle \{a_k\}, \{b_k\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$  definuje skalární součin na prostoru  $\ell^2$ . Bonus: dokažte, že  $\ell^2$  je Hilbertův prostor.

(1a)  $f = 1 - x$  (1b)  $x = e_1, y = e_2$  (1c)  $x = e_1, y = e_2$  (2)  $x = e_1, y = e_2$  (3)  $x = e_1, y = e_2$  (4)  $x = e_1, y = e_2$  (5)  $x = e_1, y = e_2$  (6)  $x = e_1, y = e_2$  (7)  $x = e_1, y = e_2$  (8) Bonus: vyzkoušejte z Bolzano-Weierstrassova lemmatu, že množina  $\{x_n\}$  má v  $\mathbb{R}$  nějaký limitní bod. Kdyžtak nakoukněte do řešení.

