



11. cvičení – Fourierova transformace

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Necht $f \in L^1$. Pak Fourierovu transformaci funkce f definujeme vztahem

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt} d\lambda(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 2. Jelikož $|f(x)e^{-ixt}| = |f(x)|$, integrál výše konverguje pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Věta 3 (základní vlastnosti Fourierovy transformace). Necht $f \in L^1$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.

- (i) Je-li $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, pak $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t - \alpha)$.
- (ii) Je-li $g(x) = f(x - \alpha)$, pak $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t)e^{-i\alpha t}$.
- (iii) Je-li $g(x) = \overline{f(-x)}$, pak $\widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$.
- (iv) Je-li $g(x) = f(x/\lambda)$ a $\lambda > 0$, pak $\widehat{g}(t) = \lambda \widehat{f}(\lambda t)$.

Věta 4 (věta o inverzi). Pokud $f \in L^1$, $\widehat{f} \in L^1$ a $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{ixt} dm(t)$, $x \in \mathbb{R}$, pak $g \in C_0$ a $f(x) = g(x)$ s.v.

Důsledek 5 (věta o jednoznačnosti). Je-li $f \in L^1$ a $\widehat{f}(t) = 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, pak $f(x) = 0$ s.v.

Hinty

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Příklady

1. Určete Fourierovu transformaci následujících funkcí

- (a) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ e^{-t}, & t > 0, \end{cases}$
- (b) $f(t) = \begin{cases} a + t, & t \in (-a, 0), \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}, \quad a > 0$
- (c) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in (0, \pi), \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$
- (d) $f(t) = \chi_{(0,1)}(t)$
- (e) $\text{Z předchozího příkladu odvoďte } f(t) = \chi_{(4,6)}(t)$
- (f) $f(t) = t\chi_{(-1,1)}(t)$
- (g) $f(t) = e^t$
- (h) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-at}, & \text{jinak,} \end{cases} \quad a > 0$
- (i) $f(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq \frac{\pi}{2}, \\ \cos t, & |t| < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$
- (j) $f(t) = e^{-t^2}$

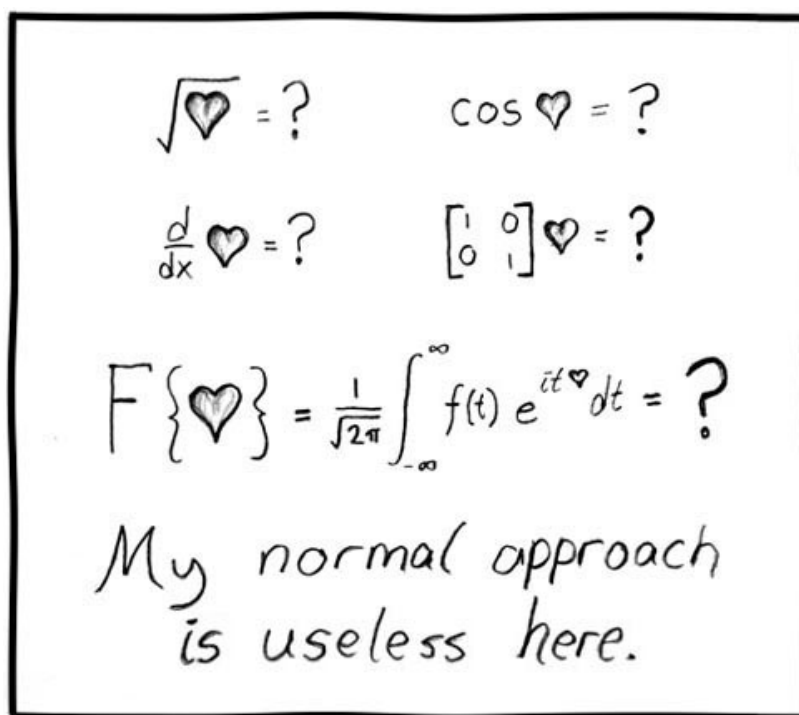
2. Necht $\mathcal{F}[f(x)] = F(x)$. Dokažte, že:

(a) $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{x}{a}\right), a > 0$

(b) $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-x)$

(c) Dokažte, že obrazem sudé funkce je sudá a obrazem liché funkce lichá funkce.

(d) $\mathcal{F}[f(t-a)] = e^{-iau} F(u)$



<https://xkcd.com/55/>

(1g) Ne každá funkce má F. transformaci
(1f) Hinty;

(1c) $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
(1e) Věta 3(i) a (iv)