



## 10. cvičení – Norma zobrazení

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

### Příklady

1. Spočítejte normu funkcionálu  $\varphi$  na prostoru  $X$  a zjistěte, zda  $\varphi$  své normy nabývá.

(a)  $X = \ell^\infty$ ,  $\varphi(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} x_n$ ;

**Řešení:** Uvažujme  $\{x_n\} \in \lambda^\infty$  takové, že  $\|\{x_n\}\|_\infty \leq 1$ . Tedy  $|x_n| \leq 1$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Pak

$$|\varphi(\{x_n\})| = \left| \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^\infty |2^{-n} x_n| = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} |x_n| \leq \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \cdot 1 = 1$$

Použili jsme odhad pro absolutní konvergenci řady, větu o konvergenci a uspořádání a součet geometrické řady.

Tedy  $\|\varphi\| \leq 1$ .

Zároveň pro  $\{a_n\} = (1, 1, 1, \dots) \in \lambda^\infty$  platí

$$|\varphi(\{x_n\})| = \left| \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \right| = 1,$$

tedy  $\|\varphi\| \geq 1$ .

Dohromady

$$\|\varphi\| = 1$$

a normy se nabývá.

(b)  $X = L^\infty([0, 1])$ ,  $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t) dt$ ;

**Řešení:** Uvažujme  $f \in L^\infty([0, 1])$  takové, že  $\|f\|_\infty \leq 1$ . Potom platí

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) f(t) dt \right| \leq \int_0^1 \left|t - \frac{1}{2}\right| |f(t)| dt \leq \int_0^1 \left|t - \frac{1}{2}\right| dt = \frac{1}{4}.$$

Tedy  $\|\varphi\| \leq \frac{1}{4}$ .

Zvolme  $f(t) = \text{sign}(t - \frac{1}{2})$ , která je v  $L^\infty([0, 1])$  s normou 1. Pak

$$\varphi(f) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) \text{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - t\right) dt + \int_{1/2}^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{4}.$$

Norma je tedy rovna  $\frac{1}{4}$  a nabývá se jí.

(c)  $X = \ell^1$ ,  $\varphi(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty x_n$ ;

**Řešení:** Uvažujme  $\{x_n\} \in \ell^1$  takové, že  $\|\{x_n\}\|_1 \leq 1$ . Tedy  $\sum_{n=1}^\infty |x_n| \leq 1$ . Pak

$$|\varphi(\{x_n\})| = \left| \sum_{n=1}^\infty x_n \right| \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n| \leq 1.$$

Zároveň pro  $\{e_1\} = (1, 0, 0, \dots) \in \ell^1$  platí  $\|e_1\|_1 = 1$  a

$$\varphi(\{e_1\}) = \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,n} = 1,$$

tedy  $\|\varphi\| \geq 1$ .

Dohromady  $\|\varphi\| = 1$  a normy se nabývá.

- (d)  $X = C([0, 1])$ ,  $\varphi(f) = f(0)$ ;

**Řešení:** Uvažujme  $f \in C([0, 1])$  takové, že  $\|f\|_{\infty} \leq 1$ . Tedy  $|f(t)| \leq 1$  pro každé  $t \in [0, 1]$ . Pak

$$|\varphi(f)| = |f(0)| \leq 1.$$

Tedy  $\|\varphi\| \leq 1$ .

Zároveň pro  $f(t) = 1 \in C([0, 1])$  platí  $\|f\|_{\infty} = 1$  a

$$\varphi(f) = f(0) = 1,$$

tedy  $\|\varphi\| \geq 1$ .

Dohromady  $\|\varphi\| = 1$  a normy se nabývá.

- (e)  $X = C([0, 1])$ ,  $\varphi(f) = f(0) - f(1)$ ;

**Řešení:** Uvažujme  $f \in C([0, 1])$  takové, že  $\|f\|_{\infty} \leq 1$ . Tedy  $|f(t)| \leq 1$  pro každé  $t \in [0, 1]$ . Pak

$$|\varphi(f)| = |f(0) - f(1)| \leq |f(0)| + |f(1)| \leq 2.$$

Tedy  $\|\varphi\| \leq 2$ .

Zároveň pro funkci

$$f(t) = 1 - 2t$$

platí  $\|f\|_{\infty} = 1$  a

$$\varphi(f) = f(0) - f(1) = 1 - (-1) = 2,$$

tedy  $\|\varphi\| \geq 2$ .

Dohromady tedy platí  $\|\varphi\| = 2$  a norma se nabývá.

- (f)  $X = C([0, 1])$ ,  $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t) dt$ ;

**Řešení:** Uvažujme  $f \in C([0, 1])$  takové, že  $\|f\|_{\infty} \leq 1$ . Tedy  $|f(t)| \leq 1$  pro každé  $t \in [0, 1]$ . Pak

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^1 t f(t) dt \right| \leq \int_0^1 t |f(t)| dt \leq \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

Tedy  $\|\varphi\| \leq \frac{1}{2}$ .

Zároveň pro funkci  $f = 1$  platí

$$\varphi(f) = \int_0^1 t = \frac{1}{2}.$$

Dohromady

$$\|\varphi\| = \frac{1}{2}$$

a normy se nabývá.

(g)  $X = L^1([0, 1])$ ,  $\varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$ .

**Řešení:** Uvažujme  $f \in L^1([0, 1])$  takové, že  $\|f\|_1 \leq 1$ . Tedy  $\int_0^1 |f(t)| dt \leq 1$ . Pak

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^{1/2} f(t) dt \right| \leq \int_0^{1/2} |f(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq 1.$$

Tedy  $\|\varphi\| \leq 1$ .

Zároveň pro  $f(t) = 2\chi_{[0, 1/2]}(t) \in L^1([0, 1])$  platí  $\|f\|_1 = \int_0^{1/2} 2 dt = 1$  a

$$\varphi(f) = \int_0^{1/2} 1 dt = 1.$$

Dohromady  $\|\varphi\| = 1$  a normy se nabývá.

(h)  $X = \ell^1$ ,  $\varphi(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty (1 - \frac{1}{n})x_{2n}$ ;

**Řešení:** Uvažujme  $\{x_n\} \in \ell^1$  takové, že  $\|\{x_n\}\|_1 \leq 1$ . Tedy  $\sum_{n=1}^\infty |x_n| \leq 1$ . Pak

$$|\varphi(\{x_n\})| = \left| \sum_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_{2n} \right| \leq \sum_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right) |x_{2n}| \leq \sum_{n=1}^\infty |x_{2n}| \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n| \leq 1.$$

Použili jsme větu o uspořádání.

Tedy  $\|\varphi\| \leq 1$ .

Zároveň pro každé  $N \in \mathbb{N}$  zvolme  $\{x_n\}$  kde  $x_{2N} = 1$  a ostatní členy nulové. Pak  $\|x\|_1 = 1$  a

$$\varphi(\{x_n\}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \rightarrow 1 \text{ pro } N \rightarrow \infty,$$

tedy  $\|\varphi\| \rightarrow 1$ .

Normy se nenabývá: Předpokládejme pro spor, že existuje  $\{x_n\} \in \ell^1$ ,  $\|x\|_1 \leq 1$  s  $|\varphi(x)| = 1$ . Pak ale

$$\sum_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right) |x_{2n}| < \sum_{n=1}^\infty |x_{2n}| \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n| = 1,$$

což je spor.

Dohromady  $\|\varphi\| = 1$  a normy se nenabývá.

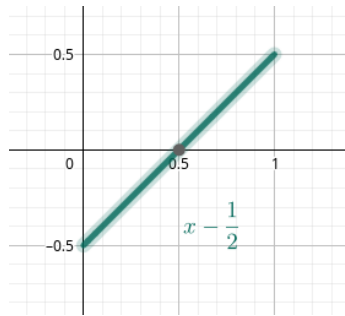
(i)  $X = C([0, 1])$ ,  $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2})f(t) dt$ ;

**Řešení:** Uvažujme  $f \in C([0, 1])$  takové, že  $\|f\|_\infty \leq 1$ . Tedy  $|f(t)| \leq 1$  pro každé  $t \in [0, 1]$ . Pak

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) f(t) dt \right| \leq \int_0^1 \left|t - \frac{1}{2}\right| |f(t)| dt \leq \int_0^1 \left|t - \frac{1}{2}\right| dt.$$

Vypočítáme integrál:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|t - \frac{1}{2}\right| dt &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - t\right) dt + \int_{1/2}^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{t^2}{2}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}t\right]_{1/2}^1 \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Tedy  $\|\varphi\| \leq \frac{1}{4}$ .

Dále uvažujme (spojité) funkce

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } t \in [0, 1/2 - 1/n], \\ n(t - \frac{1}{2}) & \text{pro } t \in [1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n], \\ 1 & \text{pro } t \in [1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

Hejblátko v geogebra je tu: <https://www.geogebra.org/calculator/q52egbdj>.

Pak  $f_n \rightarrow \text{sgn}(t - \frac{1}{2})$  (bodově).

**Výpočet**  $\varphi(f_n)$ :

$$\varphi(f_n) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) f_n(t) dt = I_1 + I_2 + I_3,$$

kde

$$I_1 = \int_0^{1/2-1/n} \left(t - \frac{1}{2}\right) (-1) dt = \int_0^{1/2-1/n} \left(\frac{1}{2} - t\right) dt = \frac{1}{8} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2},$$

$$I_2 = \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} \left(t - \frac{1}{2}\right) n \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = n \int_{-1/n}^{1/n} u^2 du = \frac{2}{3n},$$

$$I_3 = \int_{1/2+1/n}^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) (1) dt = \frac{1}{8} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}.$$

Celkem:

$$\varphi(f_n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{3n} \rightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Tedy  $\|\varphi\| = \frac{1}{4}$ .

Zároveň se normy nenabývá - aby se tak stalo, musela by  $f = \text{sgn}(t - \frac{1}{2})$ , což ale není spojitá funkce.

Tedy  $\|\varphi\| = \frac{1}{4}$  a normy se nenabývá.

2. V příkladech níže dokažte, že  $T : X \rightarrow Y$  je omezené lineární zobrazení, spočtete jeho normu a rozhodněte, zda  $T$  své normy nabývá. Dále odpovězte na následující otázky:

- Je zobrazení  $T$  prosté? Pokud ne, určete jeho jádro.
- Je zobrazení  $T$  na?

- (a)  $X = Y = \ell^2$ ,  $T(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ ;

**Řešení:**

Zobrazení  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ,  $T(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ .

- $T$  je lineární zobrazení: Pro  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\{x_n\}, \{y_n\} \in \ell^2$  máme

$$T(\{x_n\} + \{y_n\})_n = x_{n+1} + y_{n+1} = T(\{x_n\})_n + T(\{y_n\})_n,$$

$$T(a\{x_n\})_n = ax_{n+1} = aT(\{x_n\})_n.$$

- Norma  $T$ : Necht  $\|x\|_2 \leq 1$ . Pak

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq 1$$

tedy  $\|T\| \leq 1$ .

Rovnost  $\|T\| = 1$  plyne z volby  $x = e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^2$ , protože  $\|e_2\|_2 = 1$  a  $Tx = (1, 0, 0, \dots) = e_1$ , tedy  $\|Tx\|_2 = 1$ . Tedy  $\|T\| = 1$  a  $T$  své normy nabývá.

- $T$  není prosté: Jádru  $\ker T = \{x \in \ell^2 \mid x_2 = x_3 = x_4 = \dots = 0 \text{ t.j. } x = (x_1, 0, 0, \dots)\}$ . Např.  $e_1 = (1, 0, 0, \dots) \in \ker T$ , protože  $T(e_1) = (0, 0, 0, \dots)$ .
- $T$  je na: Pro libovolné  $y = \{y_n\} \in \ell^2$  definujeme  $x = (0, y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell^2$ . Pak  $Tx = (y_1, y_2, y_3, \dots) = y$ , protože  $\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 = \|y\|_2^2 < \infty$ . Tedy  $T$  je na.

- (b)  $X = Y = C([0, 1])$ ,  $Tf(t) = f(1 - t)$ ;

- $T$  je lineární zobrazení: Pro  $a \in \mathbb{C}$ ,  $f, g \in C([0, 1])$  máme

$$T(f + g)(t) = (f + g)(1 - t) = f(1 - t) + g(1 - t) = Tf(t) + Tg(t),$$

$$T(af)(t) = af(1 - t) = aTf(t).$$

- Norma  $T$ : Necht  $\|f\|_\infty \leq 1$ . Pak

$$|Tf(t)| = \sup_{t \in [0, 1]} |f(1 - t)| = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| = \|f\|_\infty \leq 1,$$

tedy  $\|Tf\|_\infty \leq 1$  a  $\|T\| \leq 1$ .

Rovnost  $\|T\| = 1$  plyne z volby  $f \equiv 1 \in C([0, 1])$ , protože  $\|f\|_\infty = 1$  a  $Tf \equiv 1$ , tedy  $\|Tf\|_\infty = 1$ . Tedy  $\|T\| = 1$  a  $T$  své normy nabývá.

- $T$  je prosté: Jádru  $\ker T = \{f \in C([0, 1]) \mid f(1 - t) = 0 \ \forall t \in [0, 1]\}$ . To znamená  $f(s) = 0 \ \forall s \in [0, 1]$ , tedy  $\ker T = \{0\}$ .
- $T$  je na: Pro libovolné  $g \in C([0, 1])$  definujeme  $f(t) = g(1 - t)$ . Pak  $f \in C([0, 1])$  (spojitost se zachovává) a  $Tf(t) = f(1 - t) = g(1 - (1 - t)) = g(t)$ . Tedy  $T$  je na.

- (c)  $X = Y = \ell^2$ ,  $T(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \{\frac{x_n}{n}\}_{n=1}^\infty$ ;

**Řešení:**

- $T$  je lineární zobrazení, protože pro  $a \in \mathbb{C}$  a  $\{x_n\}, \{y_n\} \in \ell^2$  máme

$$(\{x_n\} + \{y_n\}) = \left\{ \frac{x_n + y_n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = T(\{x_n\}) + T(\{y_n\})$$

a

$$T(\{ax_n\}) = \left\{ \frac{ax_n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = aT(\{x_n\}).$$

- norma  $T$ :

Nechť  $x = \{x_n\} \in \ell^2$  takové, že  $\|\{x_n\}\|_2 \leq 1$ . Tedy  $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} \leq 1$ . Pak

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n}{n} \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot |x_n|^2 = \|x\|_2^2.$$

Odtud  $\|T\| \leq 1$ .

Rovnost  $\|T\| = 1$  plyne z volby  $x = e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ , protože  $\|e_1\|_2 = 1$  a  $\|Te_1\|_2 = 1$ .

Tedy  $\|T\| = 1$  a  $T$  své normy nabývá.

- Zobrazení  $T$  je prosté: Aby platilo, že  $T(x) = (0, 0, 0, \dots)$ , tak by muselo platit, že  $x_n = 0$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Tedy  $x = (0, 0, 0, \dots)$ ,  $\text{Ker } T = \{(0, 0, 0, \dots)\}$  a  $T$  je tedy prosté.
- Zobrazení  $T$  není na: Například posloupnost  $y = \{1/n\} \in \ell^2$ , ale příslušné  $x_n = n \cdot y_n = 1 \notin \ell^2$ . Tedy  $T$  není na.

(d)  $X = \ell^1$ ,  $Y = \ell^\infty$ ,  $T(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \{x_1 + \dots + x_n\}_{n=1}^\infty$ ;

**Řešení:**

Zobrazení  $T$  zobrazí posloupnost  $x_n$  na posloupnost se členy  $\{x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \dots\}$ .

- $T$  je lineární zobrazení: Pro  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\{x_n\}, \{y_n\} \in \ell^1$  máme

$$T(\{x_n\} + \{y_n\})_n = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k) = T(\{x_n\})_n + T(\{y_n\})_n,$$

$$T(a\{x_n\})_n = \sum_{k=1}^n ax_k = aT(\{x_n\})_n.$$

- Norma  $T$ : Nechť  $\|x\|_1 \leq 1$ . Pak

$$|(Tx)_n| = \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|_1 \leq 1,$$

tedy  $\|Tx\|_\infty \leq 1$  a  $\|T\| \leq 1$ .

Rovnost  $\|T\| = 1$  plyne z volby  $x = e_1 = (1, 0, 0, \dots) \in \ell^1$ , protože  $\|e_1\|_1 = 1$  a  $(Tx)_n = 1$  pro všechna  $n$ , tedy  $\|Tx\|_\infty = 1$ . Tedy  $\|T\| = 1$  a  $T$  své normy nabývá.

- $T$  je prosté: Jádru  $\text{ker } T = \{x \in \ell^1 \mid \sum_{k=1}^n x_k = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ . To znamená  $x_1 = 0$ ,  $x_1 + x_2 = 0 \implies x_2 = 0$ , atd., tedy  $\text{ker } T = \{0\}$ .

- $T$  není na: Uvažujme posloupnost  $y_n = (-1)^n$ . Pak příslušné  $x_n$  je tvaru  $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = -2, x_4 = 2, \dots$ . Ale taková posloupnost  $x \notin \ell^1$ , protože  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + \dots = \infty$ . Tedy  $T$  není na.

(e)  $X = Y = L^p([0, 1]), p \in [1, \infty], Tf = f\chi_{[0, 1/2]}$ ;

**Řešení:**

Zobrazení  $T : L^p([0, 1]) \rightarrow L^p([0, 1]), Tf = f \cdot \chi_{[0, 1/2]}$  restringuje funkci  $f$  na interval  $[0, \frac{1}{2}]$  a zbytek dodefinuje 0.

- $T$  je lineární zobrazení: Pro  $a \in \mathbb{C}, f, g \in L^p([0, 1])$  máme

$$T(f + g) = (f + g)\chi_{[0, 1/2]} = f\chi_{[0, 1/2]} + g\chi_{[0, 1/2]} = Tf + Tg,$$

$$T(af) = af\chi_{[0, 1/2]} = aTf.$$

- Norma  $T$ : Pro  $1 \leq p < \infty$ : Necht'  $\|f\|_p \leq 1$ . Pak

$$\|Tf\|_p^p = \int_0^{1/2} |f|^p dx \leq \int_0^1 |f|^p dx = \|f\|_p^p \leq 1,$$

tedy  $\|Tf\|_p \leq 1$  a  $\|T\| \leq 1$ .

Pro  $p = \infty$ :  $\|Tf\|_{\infty} = \text{esssup}_{[0, 1/2]} |f| \leq \text{esssup}_{[0, 1]} |f| = \|f\|_{\infty} \leq 1$ , tedy  $\|T\| \leq 1$ .

Rovnost  $\|T\| = 1$  plyne z volby  $f = 2^{1/p}\chi_{[0, 1/2]}$  pro  $p < \infty$  ( $\|f\|_p = 1$ ,  $\|Tf\|_p = 1$ ) nebo  $f = 1$  pro  $p = \infty$  ( $\|f\|_{\infty} = 1$ ,  $\|Tf\|_{\infty} = 1$ ). Tedy  $\|T\| = 1$  a  $T$  své normy nabývá.

- $T$  není prosté: Např. pro funkci  $f = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}$  máme  $T(f) = 0$ . Jádru  $\ker T = \{f \in L^p([0, 1]) \mid f = 0 \text{ s. v. na } [0, 1/2]\}$ .
- $T$  není na: Uvažujme  $g = \chi_{(1/2, 1]} \in L^p([0, 1])$ . Pak by příslušné  $f$  muselo splňovat  $Tf = f\chi_{[0, 1/2]} = 0$  na  $[0, 1/2]$ , což není možné. Tedy  $T$  není na.

(f)  $X = Y = C^1([0, 1])$  s normou  $\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}, Tf(t) = f'(t) - f(t)$  nad  $\mathbb{R}$ .

**Řešení:**

Zobrazení  $T : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]), Tf(t) = f'(t) - f(t)$  nad  $\mathbb{R}$ .

- $T$  je lineární zobrazení: Pro  $a \in \mathbb{R}, f, g \in C^1([0, 1])$  máme

$$T(f + g)(t) = (f + g)'(t) - (f + g)(t) = f'(t) - f(t) + g'(t) - g(t) = Tf(t) + Tg(t),$$

$$T(af)(t) = (af)'(t) - af(t) = af'(t) - af(t) = aTf(t).$$

- Norma  $T$ : Necht'  $\|f\|_{C^1} = \max\{\|f\|_{\infty}, \|f'\|_{\infty}\} \leq 1$ . Pak pro každé  $t \in [0, 1]$  je

$$|Tf(t)| = |f'(t) - f(t)| \leq |f'(t)| + |f(t)| \leq \|f'\|_{\infty} + \|f\|_{\infty} \leq 1,$$

tedy  $\|T\| \leq 1$ .

Rovnost  $\|T\| = 1$  plyne z volby  $f(t) = 1$ . Pak  $T(1) = 0 - 1$  a  $\|T\| = 0 + 1 = 1$ . Tedy normy se nabývá.

- $T$  není prosté:  
Jádro  $\ker T = \{f \in C^1([0, 1]) \mid f'(t) = f(t) \ \forall t \in [0, 1]\}$ . Tedy hledáme řešení diferenciální rovnice  $f' - f = 0$ . Ta jsou tvaru  $f(t) = ce^t$ .  
Tedy  $T$  není prosté.
- $T$  je na: Podle Peanovy věty existuje pro každé  $g \in C([0, 1])$  řešení  $f' - f = g$ .  
Tedy  $T$  je na.