



10. cvičení – Norma lineárního zobrazení

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Necht X je lineární prostor na $\mathbb{C}$. Řekneme, že X je *normovaný lineární prostor*, pokud každému prvku $x \in X$ je přiřazeno nezáporné reálné číslo $\|x\|$, nazývané *norma* x , splňující

- (i) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$;
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
- (iii) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Poznámka 2. Připomeňme si, že zobrazení $T : X \rightarrow Y$ mezi lineárními prostory X, Y nad K se nazývá *lineární*, pokud $T(x + y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in K$. Dále $\text{Ker } T = T^{-1}(\{0\})$ a $\text{Rng } T = T(X)$ jsou podprostory X , resp. Y . Zobrazení T je prosté právě tehdy, když $\text{Ker } T = \{0\}$.

Definice 3. Necht X, Y jsou normované lineární prostory, $T : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. *Normu* zobrazení T definujeme vztahem

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}.$$

Je-li $\|T\| < \infty$, řekneme, že T je *omezené lineární zobrazení*. Pokud navíc $Y = \mathbb{C}$, nazýváme T *omezený lineární funkcionál*.

Poznámka 4. Místo suprema přes jednotkovou kouli stačí uvažovat supremum přes jednotkovou sféru, tj. přes ta $x \in X$, pro která $\|x\| = 1$. Dále platí, že $\|T\|$ je nejmenší číslo takové, že $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$ pro všechna $x \in X$.

Věta 5 (charakterizace lineárních zobrazení). Necht X, Y jsou normované lineární prostory, $T : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) T je omezené;
- (ii) T je spojitý;
- (iii) T je spojitý v 0.

Poznámka 6. • ℓ^∞ : množina všech omezených posloupností $\mathbb{R}$ čísel. $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

- $p \in [1, \infty)$, ℓ^p : množina všech posloupností $\mathbb{R}$ čísel $(x_n)_{n=1}^\infty$ splňujících $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$.

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $L^\infty(X, \mu)$: množina takových f , pro které je $\|f\|_\infty < \infty$; $\|f\|_\infty = \text{ess sup } |f|$

- $1 < p < \infty$, $L^p(X, \mu)$ množinu takových f , pro které $\|f\|_p < \infty$. $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$

Algoritmus

1. Ověříme, že opravdu jde o lineární zobrazení (alespoň zběžně).
2. Zvolíme (obecně) $x \in X$ takové, že $\|x\| \leq 1$. Dosadíme a odhadneme $\|T(x)\| = M$.
3. Zkusíme najít takové (konkrétní) x , $\|x\| \leq 1$, že normy T se nabývá, tedy $\|T(x)\| = M$.
4. Pokud se nám takové x nedaří najít,

- (a) najdeme (konkrétní) posloupnost x_n tak, že $\|T(x_n)\| \rightarrow M$;

(b) zdůvodníme, proč se normy nemůže nabývat.

5. Najdeme všechna $x \in X$ taková, že $T(x) = 0$. Z toho zjistíme, zda je T prosté a jaký je $\text{Ker } T$.
6. Zvolíme $y \in Y$. K němu zkusíme najít $x \in X$ tak, že $T(x) = y$. Z toho určíme, zda je T na.

Příklady

1. Spočítejte normu funkcionálu φ na prostoru X a zjistěte, zda φ své normy nabývá.

- (a) $\clubsuit X = \ell^\infty$, $\varphi(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} x_n$;
- (b) $\spadesuit X = L^\infty([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t) dt$;
- (c) $X = \ell^1$, $\varphi(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty x_n$;
- (d) $X = C([0, 1])$, $\varphi(f) = f(0)$;
- (e) $\heartsuit X = C([0, 1])$, $\varphi(f) = f(0) - f(1)$;
- (f) $X = C([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t) dt$;
- (g) $\clubsuit X = L^1([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$.
- (h) $\star X = \ell^1$, $\varphi(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty (1 - \frac{1}{n}) x_{2n}$;
- (i) $\otimes X = C([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t) dt$;

Hejblátko v geogebra: <https://www.geogebra.org/calculator/q52egbdj>.

2. V příkladech níže dokažte, že $T : X \rightarrow Y$ je omezené lineární zobrazení, spočítejte jeho normu a rozhodněte, zda T své normy nabývá. Dále odpovězte na následující otázky:

- Je zobrazení T prosté? Pokud ne, určete jeho jádro.
- Je zobrazení T na?

- (a) $X = Y = \ell^2$, $T(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$;
- (b) $X = Y = C([0, 1])$, $Tf(t) = f(1 - t)$;
- (c) $\heartsuit X = Y = \ell^2$, $T(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \{\frac{x_n}{n}\}_{n=1}^\infty$;
- (d) $\spadesuit X = \ell^1$, $Y = \ell^\infty$, $T(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \{x_1 + \dots + x_n\}_{n=1}^\infty$;
- (e) $\spadesuit X = Y = L^p([0, 1])$, $p \in [1, \infty]$, $Tf = f \chi_{[0, 1/2]}$;
- (f) $\clubsuit X = Y = C^1([0, 1])$ s normou $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, $Tf(t) = f'(t) - f(t)$ nad $\mathbb{R}$.

(1a) $x = (1, 1, 1, \dots)$

(1b) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(1c) $f = 1 - 2t$

(2a) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2b) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2c) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2d) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2e) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2f) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2g) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2h) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2i) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2j) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2k) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2l) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2m) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2n) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2o) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2p) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2q) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2r) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2s) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2t) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2u) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2v) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2w) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2x) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2y) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(2z) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$

(1) normy se nenabývají; zvolte x_n tak, že $x_{2N} = 1$, $x_n = 0$ pro $n > 2N$.

(2) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(3) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(4) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(5) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(6) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(7) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(8) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(9) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(10) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(11) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(12) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(13) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(14) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(15) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(16) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(17) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(18) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(19) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(20) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(21) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(22) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(23) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(24) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(25) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(26) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(27) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(28) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(29) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(30) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(31) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(32) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(33) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(34) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(35) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(36) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(37) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(38) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(39) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(40) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(41) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(42) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(43) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(44) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(45) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(46) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(47) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(48) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(49) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(50) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(51) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(52) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(53) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(54) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(55) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(56) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(57) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(58) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(59) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(60) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(61) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(62) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(63) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(64) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(65) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(66) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(67) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(68) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(69) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(70) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(71) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(72) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(73) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(74) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(75) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(76) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(77) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(78) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(79) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(80) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(81) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(82) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(83) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(84) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(85) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(86) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(87) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(88) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(89) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(90) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(91) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(92) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(93) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(94) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(95) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(96) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(97) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(98) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(99) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

(100) $\text{sgn}(t) = f(\frac{t}{2})$.

Kalkulus 3, 2025/26, Kristýna Kuncová

2