



9. cvičení – Fourierovy řady

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Rozviňte funkci do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně (lok. stejnoměrně) na největších možných podintervalech $[0, 2\pi]$ (příp. $\mathbb{R}$) a určete její součet. Určete pak součet zadaných číselných řad.

$$(a) \quad f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad x \in (-\pi, \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Řešení:

- Funkce je po částech monotónní.
- Funkce f je lichá, tedy $a_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Pro b_n máme

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} ((-1)^{n+1} + 1)$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} ((-1)^{n+1} + 1) \sin(nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$$

- Z vět pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

- Z výše uvedeného dostáváme, že

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\frac{\pi}{2})}{2n-1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$(b) \quad f(x) = \cos^6 x, \quad x \in (-\pi, \pi]$$

Řešení:

- Máme $f \in C^1(\mathbb{R})$.
- Dále ze vzorců $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ a $2 \cos a \cos b = (\cos(a-b) + \cos(a+b))$ lze odvodit

$$\begin{aligned} \cos^6 x &= \frac{1}{8} (1 + \cos 2x)^3 = \frac{1}{8} (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) \\ &= \frac{1}{8} \left(1 + 3 \cos 2x + 3 \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) + \cos 2x \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2} \cos 2x + \frac{3}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} (\cos 2x \cos 4x) \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2} \cos 2x + \frac{3}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 6x \right) \right) \\ &= \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{32} \cos 6x \end{aligned}$$

- Protože funkce sama je trigonometrickým polynomem, tak Fourierova řada s funkcí splývá (plyne např. z Faktů ze cvičení). Tedy

$$s^f = \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{32} \cos 6x$$

Z Diniho věty navíc plyne

$$f = \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{32} \cos 6x$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0] \\ x, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Řešení:

- Funkce je po částech monotónní.
- Pro a_n máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

a z per partes

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} x \sin nx \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n} \sin nx \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} x \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^\pi \right) = \frac{1}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{1}{n} x \cos nx \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{n} \cos nx \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^\pi \right) = -\frac{1}{n} (-1)^n \end{aligned}$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1) \cos(nx) - \frac{1}{n} (-1)^n \sin(nx)$$

- Z vět pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

$$(d) \quad f(x) = \pi^2 - x^2, \quad x \in (-\pi, \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Řešení:

- Funkce je po částech monotónní.
- Funkce f je sudá, tedy $b_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro a_n máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \pi^2 - x^2 \, dx = \left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{4}{3} \pi^2.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - x^2) \cos(nx) \, dx \\
&= 2\pi \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{2x \sin nx}{n} \, dx \\
&= \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{4}{n\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \right]_0^\pi + \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi \frac{1}{n} \cos nx \, dx \\
&= \frac{-4}{n\pi} \cdot \frac{\pi \cos n\pi}{n} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}
\end{aligned}$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$$

- Protože f je spojitá na $\mathbb{R}$, tak z vět pak plyne, že na $\mathbb{R}$ je

$$s^f = f(x).$$

- Z výše uvedeného dostáváme, že

$$\pi^2 = f(0) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos n0 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Analogicky

$$0 = f(\pi) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2}.$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$(e) \quad \ast\ast f(x) = e^x, \quad x \in (-\pi, \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

Řešení:

- Funkce je po částech monotónní.
- Pro a_n máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \, dx = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}$$

Dále označme $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx, n \in \mathbb{N}$ a z per partes

$$\begin{aligned}
I_n &= [e^x \cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, dx \\
&= \cos(n\pi)(e^\pi - e^{-\pi}) + n \left([e^x \sin nx]_{-\pi}^{\pi} - n \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx \right) \\
&= \cos(n\pi)(e^\pi - e^{-\pi}) - n^2 I_n.
\end{aligned}$$

Odtud

$$I_n = (-1)^n \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{1 + n^2}$$

a tedy

$$a_n = (-1)^n \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)}$$

Analogicky (lze odvodit i z výpočtů výše) vyjde

$$b_n = (-1)^{n+1} n \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)}$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)} \cos(nx) + (-1)^{n+1} n \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)} \sin(nx)$$

- Z vět pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

- Z výše uvedeného dostáváme

$$1 = f(0) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)} \cos(n0) + (-1)^{n+1} n \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)} \sin(n0)$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} = \left(1 - \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}\right) \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} = \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}$$

$$(f) \quad *f(x) = \sin(3x) + 4x, \quad x \in (-\pi, \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n}$$

Řešení:

- Funkce $4x$ je monotónní a funkce $\sin(3x)$ je po částech monotónní na intervalu $[-\pi, \pi]$.
- Funkce je lichá, tedy $a_n = 0$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.

Pro b_n máme:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(3x) \sin(nx) \, dx = \begin{cases} 1, & n = 3, \\ 0, & n \neq 3. \end{cases}$$

Dále

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi 4x \sin 3x \, dx = \frac{8}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi + \frac{8}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n} \, dx = (-1)^{n+1} \frac{8}{n}$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \sin 3x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

- Z vět pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$_s f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

- Z výše uvedeného dostáváme

$$\sin 3 + 4 = f(1) = \sin 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n.$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2}$$

$$(g) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$$

Řešení:

- Funkce je po částech monotónní.
- Pro a_n máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, dx = 1.$$

Dále

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} = 0$$

a

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} = -\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$_s f = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \sin nx$$

- Z vět pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$_s f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

$$(h) \quad \boxtimes f(x) = x^2 \quad x \in [0, 2\pi),$$

Řešení:

- Funkce je po částech monotónní.
- Pro a_n máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{8}{3} \pi^2.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx) \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2x \sin nx}{n} \, dx \\
&= \frac{-2}{n\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} \left[\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{-2}{n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} \cos nx \, dx \\
&= \frac{4\pi}{\pi n^2} - \frac{2}{n^3\pi} [\sin nx]_0^{2\pi} \\
&= \frac{4}{n^2}
\end{aligned}$$

Analogicky pro

$$b_n = -\frac{4\pi}{n}.$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \frac{4}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx - \frac{\pi}{n} \sin nx.$$

- Z vět pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

2. K jaké funkci konverguje následující funkce? Zakreslete.

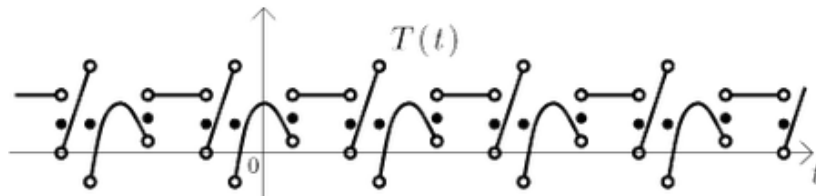


Figure 1: <http://math.feld.cvut.cz/mt/txt/3/txc3ea3f.htm>