



8. cvičení – Normované prostory

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Je následující zobrazení norma na $L^1([0, 1])$ (chápeme-li $L^1([0, 1])$ jako prostor tříd ekvivalence vzhledem k rovnosti s.v.)?

(a) $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$;

Řešení:

Pro ověření, že $\|\cdot\|$ je norma, musíme ukázat splnění následujících vlastností:

i.

$$\|f\| \geq 0 \quad \text{a} \quad \|f\| = 0 \iff f = 0 \quad \text{téměř všude.}$$

Protože integrál nezáporné funkce je vždy nezáporný, platí $\|f\| \geq 0$. Pokud $\|f\| = 0$, pak je $|f(t)| = 0$ skoro všude, a tedy $f = 0$ skoro všude.

ii. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\|\alpha f\| = \int_0^1 |\alpha f(t)| dt = |\alpha| \int_0^1 |f(t)| dt = |\alpha| \|f\|.$$

iii. Pro $f, g \in L^1([0, 1])$

$$\|f + g\| = \int_0^1 |f(t) + g(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |g(t)| dt = \|f\| + \|g\|.$$

(b) $\|f\| = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt$;

Řešení: Ne. Pro funkci $f(x) = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}$ máme $\|f\| \neq 0$, přestože $f \neq 0$.

(c) $\|f\| = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Řešení: Ne. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ platí, že $f \in L^1((0, 1))$, ale

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \int_0^1 \frac{1}{x} = \infty$$

2. Je následující zobrazení norma na prostoru $X = \{p : p \text{ je polynom na } [0, 1]\}$?

(a) $\|p\| = \sup\{|p(t)| : t \in [0, 1]\}$;

Řešení: Ano.

- Norma je vždy nezáporná, protože hodnoty absolutní hodnoty jsou nezáporné:

$$\|p\| = \sup_{t \in [0, 1]} |p(t)| \geq 0.$$

Dále platí, že $\|p\| = 0$ právě tehdy, když pro všechna $t \in [0, 1]$ je $p(t) = 0$. Polynom nulový na celém intervalu musí být nulovým polynomem (všechny koeficienty jsou nulové), takže

$$\|p\| = 0 \iff p = 0.$$

- Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $p \in X$ platí

$$\|\alpha p\| = \sup_{t \in [0,1]} |\alpha p(t)| = |\alpha| \sup_{t \in [0,1]} |p(t)| = |\alpha| \|p\|.$$

- Pro $p, q \in X$ platí

$$\|p + q\| = \sup_{t \in [0,1]} |p(t) + q(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |p(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |q(t)| = \|p\| + \|q\|,$$

kde nerovnost vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti a vlastností suprema.

(b) $\|p\| = \int_0^1 p(t) dt$;

Řešení: Ne.

Například polynom $p(t) = t - \frac{1}{2}$ není nulový, ale

$$\|p\| = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = 0.$$

(c) $\|p\| = |p(0)|$.

Řešení: Ne.

Existují nenulové polynomy, které ve 0 nabývají nulové hodnoty, například $p(t) = t$, pro který $\|p\| = |p(0)| = 0$, ale $p \neq 0$ jako prvek prostoru.

3. Rozhodněte, pro která $p \in [1, \infty]$ následující posloupnosti konvergují v ℓ^p .

(a) $\{1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \dots\}$, (n -krát);

Řešení: Jediným kandidátem na limitu je posloupnost samých jedniček. Označme ji x . Pak

Pro $p \in [1, \infty)$ pak máme

$$\|x_n - x\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - x^k|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |0 - 1|^p = \infty,$$

tedy posloupnost x_n^k nekonverguje.

Pro $p = \infty$ máme

$$\|x_n - x\|_{\infty} = \sup_k |x_n^k - x^k| = 1,$$

tedy posloupnost x_n^k nekonverguje.

Závěr: posloupnost nekonverguje pro žádné $p \in [1, \infty]$.

(b) $\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0, \dots\}$, (n -krát);

Řešení: Jediným kandidátem na limitu je posloupnost samých nul. Označme ji x . Pak

Pro $p \in [1, \infty)$ pak máme

$$\|x_n - x\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - x^k|^p = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^p = \frac{n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$$

Pro $p \in (1, \infty)$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p-1}} = 0,$$

tedy posloupnost x_n^k konverguje.

Pro $p = 1$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$, tedy posloupnost x_n^k nekonverguje.

Pro $p = \infty$ máme

$$\|x_n - x\|_\infty = \sup_k |x_n^k - x^k| = \frac{1}{n}$$

a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, tedy posloupnost x_n^k konverguje.

Závěr: posloupnost konverguje pro $p \in (1, \infty]$.

(c) $\{1, 2, 3, \dots, n, 0, \dots, 0, \dots\}$;

Řešení: Jediným kandidátem na limitu je posloupnost $x^k = k$. Pak

Pro $p \in [1, \infty)$ pak máme

$$\|x_n - x\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - x^k|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |k|^p = \infty,$$

tedy posloupnost x_n^k nekonverguje.

Pro $p = \infty$ máme

$$\|x_n - x\|_\infty = \sup_k |x_n^k - x^k| = \infty,$$

tedy posloupnost x_n^k nekonverguje.

Závěr: posloupnost nekonverguje pro žádné $p \in [1, \infty]$.

(d) $\{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots, 0, \dots\}$, (n -krát).

Řešení: Jediným kandidátem na limitu je posloupnost samých nul. Označme ji x .

Pak

Pro $p \in [1, \infty)$ pak máme

$$\|x_n - x\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - x^k|^p = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^p = \frac{1}{n^{p/2-1}}$$

Pro $p \in (2, \infty)$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p/2-1}} = 0,$$

tedy posloupnost x_n^k konverguje.

Pro $p = 2$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$, tedy posloupnost x_n^k nekonverguje.

Pro $p \in [1, 2)$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p/2-1}} = \infty$, tedy posloupnost x_n^k nekonverguje.

Pro $p = \infty$ máme

$$\|x_n - x\|_\infty = \sup_k |x_n^k - x^k| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, tedy posloupnost x_n^k konverguje.

Závěr: posloupnost konverguje pro $p \in (2, \infty]$.

4. Prostory l^p :

- (a) Necht $1 \leq p \leq \infty$. Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která posloupnost $a_n = n^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, patří do prostoru ℓ^p .

Řešení: Prostor ℓ^p je tvořen posloupnostmi $x = (x_n)$ takovými, že

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty \quad \text{pro } 1 \leq p < \infty,$$

nebo

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty \quad \text{pro } p = \infty.$$

Uvažujeme posloupnost $a_n = n^\alpha$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pro $1 \leq p < \infty$: Podmínka, že $a = (a_n) \in \ell^p$ znamená konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^\alpha|^p = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p}.$$

Pro konvergenci musí platit

$$\alpha p < -1,$$

tedy

$$\alpha < -\frac{1}{p}.$$

Pro $p = \infty$: Podmínka, že posloupnost je limitně omezená, je

$$\sup_n |n^\alpha| < \infty,$$

což platí právě, když $\alpha \leq 0$.

- (b) Dokažte, že $\ell^1 \subseteq \ell^2$.

Řešení:

Necht $x = \{x_n\} \in \ell^1$, tedy

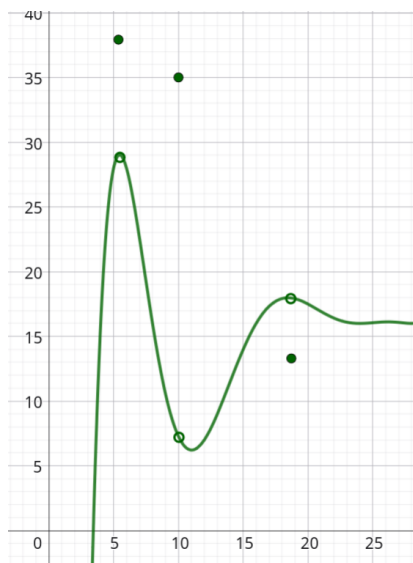
$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty.$$

Protože jde o konvergentní posloupnost, tak od jistého n_0 platí, že $|x_n| < 1$. Pak ale $|x_n|^2 < |x_n|$.

Tedy ze srovnávacího kritéria konvergence řad platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

5. Spočtěte $\|f\|_\infty$, kde



Řešení:

Z obrázku $\|f\|_\infty = 29$. (Ignorujeme izolované body, protože mají míru 0.)

6. Spočtěte $\|f\|_\infty$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0, 2], \\ 1, & x \in [0, 1) \cup (1, 2], \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

Řešení: Načtneme funkci a zjistíme, že $\|f\|_\infty = 1$.

7. Určete $\|f\|_\infty$ pro Dirichletovu funkci.

Řešení: $\|f\|_\infty = 0$. (Funkce nabývá jiných hodnot pouze na $\mathbb{Q}$, což je množina míry 0.)

8. Najděte funkci f na $\mathbb{R}$, která je esenciálně omezená, ale není omezená.

Řešení: Např. $f = x \cdot D(x)$, kde $D(x)$ značí Dirichletovu funkci.

9. Prostory L^p :

(a) Necht' $1 \leq p \leq \infty$. Najděte všechna $\gamma \in \mathbb{R}$, pro která funkce $f(x) = x^\gamma$, $x \in (0, 1)$, patří do prostoru $L^p(0, 1)$.

Řešení:

Necht' $1 \leq p < \infty$. Pak

Funkce f náleží do $L^p(0, 1)$, pokud platí

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 |x^\gamma|^p dx = \int_0^1 x^{\gamma p} dx < \infty.$$

Integrál konverguje právě tehdy, když

$$\gamma p > -1,$$

tedy právě pro $\gamma > -1/p$.

Nechť $p = \infty$. Pak f náleží do $L^\infty(0, 1)$ právě tehdy, když je (esenciálně) omezená, tj.

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in (0,1)} |x^\gamma| < \infty.$$

Funkce x^γ je omezená na $(0, 1)$ právě tehdy, když $\gamma \geq 0$, protože

Shrnutí:

$$\boxed{\begin{cases} f \in L^p(0, 1), 1 \leq p < \infty, & \text{pokud } \gamma > -\frac{1}{p}, \\ f \in L^\infty(0, 1), & \text{pokud } \gamma \geq 0. \end{cases}}$$

(b) Nechť $1 < p < q < \infty$. Dokažte, že $L^\infty(0, 1) \subseteq L^q(0, 1) \subseteq L^p(0, 1) \subseteq L^1(0, 1)$.

Řešení:

Nechť $1 < p < q < \infty$.

1. Inkluze $L^\infty(0, 1) \subseteq L^q(0, 1)$

Nechť $f \in L^\infty(0, 1)$, tedy existuje $M > 0$ tak, že $|f(x)| \leq M$ téměř všude na $(0, 1)$.

Potom

$$\|f\|_q^q = \int_0^1 |f(x)|^q dx \leq \int_0^1 M^q dx = M^q < \infty,$$

tudíž $f \in L^q(0, 1)$.

2. Inkluze $L^q(0, 1) \subseteq L^p(0, 1)$

Nechť $f \in L^q(0, 1)$, tj. $\|f\|_q < \infty$. Jelikož $(0, 1)$ má konečnou míru 1, pomocí Hölderovy nerovnosti máme

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^q dx \right)^{1/q} \cdot (1)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} = \|f\|_q,$$

protože $p < q$ implikuje $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$.

Tedy $\|f\|_p < \infty$ a $f \in L^p(0, 1)$.

3. Inkluze $L^p(0, 1) \subseteq L^1(0, 1)$

Podobně, protože $p > 1$,

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot (1)^{1 - \frac{1}{p}} = \|f\|_p,$$

opět s využitím Hölderovy nerovnosti.

(c) Najděte $f \in L^1(0, 1) \setminus L^2(0, 1)$.

Řešení:

Nechť

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Ověření, že $f \in L^1(0, 1)$:

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = 2 < \infty.$$

Ověření, že $f \notin L^2(0, 1)$:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = [\log x]_0^1 = \infty.$$

(d) Najděte $f \in L^3(\mathbb{R}) \setminus L^4(\mathbb{R})$.

Řešení: Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \in (0, 1), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

kde $\alpha > 0$ dopočteme.

Potřebujeme, aby konvergoval integrál

$$\int_0^1 x^{3\alpha} dx,$$

ale divergoval integrál

$$\int_0^1 x^{4\alpha} dx.$$

Tedy potřebujeme, aby

$$3\alpha > -1, \quad 4\alpha < -1.$$

Zvolme např. $\alpha = (-\frac{1}{3} - \frac{1}{4})/2 = -\frac{7}{12}$.

(e) Najděte $f \in L^4(\mathbb{R}) \setminus L^3(\mathbb{R})$.

Řešení: Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1, \end{cases}$$

kde $\alpha > 0$ dopočteme.

Potřebujeme, aby konvergoval integrál

$$\int_1^\infty x^{4\alpha} dx,$$

ale divergoval integrál

$$\int_1^\infty x^{3\alpha} dx.$$

Tedy potřebujeme, aby

$$3\alpha > -1, \quad 4\alpha < -1.$$

Zvolme např. $\alpha = (-\frac{1}{3} - \frac{1}{4})/2 = -\frac{7}{12}$.

(f) Najděte $f \in L^1(0, 1)$ takovou, že $f \notin L^p(0, 1)$ pro žádné $p > 1$.

Řešení:

Definujme

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot (1 + |\log x|)^2}, \quad x \in (0, 1).$$

1. Ověření, že $f \in L^1(0, 1)$:

Vypočítáme integrál

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x(1 + |\log x|)^2} dx.$$

Provedeme substituci $y = \log x$, $dy = \frac{1}{x} dx$,

Dostaneme

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1 + y^2} dy = \frac{\pi}{2}.$$

2. Ověření, že $f \notin L^p(0, 1)$ pro všechna $p > 1$:

Pro $p > 1$ zkoumáme

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p(1 + |\log x|)^{2p}} dx$$

Pro $x \in (0, 1)$ je $|\log x| = -\log x$. Zavedením substituce

$$t = -\log x, \quad \text{tedy } x = e^{-t}, \quad dx = -e^{-t} dt,$$

přepíšeme integrál jako

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p(1 + |\log x|)^{2p}} dx = \int_{\infty}^0 \frac{1}{e^{-pt}(1 + t)^{2p}} (-e^{-t} dt) = \int_0^{\infty} \frac{e^{t(p-1)}}{(1 + t)^{2p}} dt,$$

což diverguje (e^t „převáží“ polynom).

3. Pro $p = \infty$: Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x(1 + |\log x|)^2} = \infty$$

Následující příklady máme z https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza_praha_studenty_2025-06-28.pdf

10. Dokažte následující větu:

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Definujme zobrazení

$$\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty), \quad \rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Potom ρ je metrika na X .

Důkaz. Nechť $x, y \in X$. Potom zřejmě $d(x, y) \in [0, \infty)$. Ověříme podmínky (a)–(c) z Definice metriky.

Rovnost $d(x, y) = 0$ nastává právě tehdy, když $\|x - y\| = 0$, což nastává právě tehdy, když $x - y = 0$, neboli $x = y$.

Použijeme-li podmínku (b) z Definice normy pro speciální volbu $\alpha = 1$, dostaneme

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|1 \cdot (y - x)\| = d(y, x);$$

tedy symetrii.

Pro každé $x, y, z \in X$ platí díky podmínce (c) z Definice normy

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Ověřili jsme tedy všechny podmínky metriky. Tím je důkaz dokončen.

11. Dokažte, že následující dvojice tvoří reálný normovaný lineární prostor.

(a) $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\sup})$

Řešení. Je snadné ověřit, že množina $C([a, b])$ s uvedenými operacemi tvoří vektorový prostor. Poznamenejme, že je třeba využít větu, ze které plyne, že součet spojitých funkcí je spojitá funkce a násobek spojité funkce je také spojitá funkce. Podle příslušné věty je $\|f\|_{\sup} \in [0, \infty)$ pro každé $f \in C([a, b])$. Vlastnosti (a), (b) z Definice normy jsou zřejmě splněny. Pro $f, g \in C([a, b])$ díky trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\|f + g\|_{\sup} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| = \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}.$$

Tím je ověřena vlastnost (c) z Definice normy, a tedy $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\sup})$ je reálný normovaný lineární prostor.

(b) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$

Řešení. Operace sčítání prvků z ℓ^∞ i násobení prvků z ℓ^∞ reálnými čísly jsou dobře definovány, neboť součet dvou omezených posloupností je opět omezená posloupnost a násobek omezené posloupnosti je také omezená posloupnost. Není těžké ověřit, že ℓ^∞ s uvedenými operacemi tvoří reálný vektorový prostor. Poznamenejme, že nulovým vektorem je posloupnost, jejíž všechny členy jsou rovny 0.

Ověříme, že zobrazení $x \mapsto \|x\|_\infty$ je norma na ℓ^∞ . Pokud $x = 0$, pak snadný výpočet dává $\|x\|_\infty = 0$. Pokud pro $x \in \ell^\infty$ platí $\|x\|_\infty = 0$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ musí platit $|x_n| = 0$, a tedy $x = 0$. Máme-li $x \in \ell^\infty$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom

$$\|\alpha x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha x_n| = |\alpha| \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = |\alpha| \|x\|_\infty.$$

Pro $x, y \in \ell^\infty$ máme díky trojúhelníkové nerovnosti

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

(c) $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$

Řešení. Pokud $x = (x_n) \in c_0$, $y = (y_n) \in c_0$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 + 0 = 0$, a tedy $x + y \in c_0$. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x_n = \alpha \cdot 0 = 0$, a tedy $\alpha x \in c_0$. Poněvadž každý prvek z c_0 leží v ℓ^∞ , tvoří c_0 vektorový podprostor ℓ^∞ . Zobrazení $x \mapsto \|x\|_\infty$ je pak normou na c_0 podle předchozího příkladu.