



8. cvičení – Normované prostory

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Necht' T je těleso komplexních nebo reálných čísel, necht' V množina s binární operací sčítání, kterou budeme značit symbolem „+“. Necht' je dáno zobrazení kartézského součinu $T \times V$ do množiny V ; dvojici prvků $a \in T$ a $v \in V$ toto zobrazení přiřazuje prvek, který značíme $a \cdot v$ nebo jednodušeji av ; hovoříme o násobení prvků množiny V prvky tělesa T , které značíme symbolem „ $\cdot$ “. Necht' dále platí:

- (i) $\forall u, v, w \in V, (u + v) + w = u + (v + w)$
- (ii) $\forall u, v \in V, u + v = v + u$
- (iii) $\exists o \in V, \forall u \in V, u + o = u$
- (iv) $\forall u \in V, \exists -u \in V, u + (-u) = o$
- (v) $\forall u, v \in V, \forall a \in T, a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
- (vi) $\forall u \in V, \forall a, b \in T, (a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$
- (vii) $\forall u \in V, \forall a, b \in T, (a \cdot b) \cdot u = a \cdot (b \cdot u)$
- (viii) $\forall u \in V, 1 \cdot u = u$

Potom budeme říkat, že V je *vektorový prostor* (nebo *lineární prostor*) nad tělesem T .

Definice 2. Necht' X je vektorový prostor nad tělesem T . Zobrazení

$$\| \cdot \| : X \rightarrow [0, \infty)$$

nazýváme *normou* na X , jestliže jsou splněny následující tři podmínky:

- (a) $\forall x \in X : \|x\| = 0 \iff x = 0$
- (b) $\forall x \in X, \forall \lambda \in T : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- (c) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dvojici $(X, \| \cdot \|)$ pak nazýváme *normovaným lineárním prostorem* nad tělesem T .

Definice 3. Necht' $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Množinu $C([a, b])$ opatříme obvyklým sčítáním funkcí a obvyklým násobením funkce reálným číslem. Definujme funkci

$$\|f\|_{\sup} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Definice 4. Definujme ℓ^∞ jako množinu všech omezených posloupností reálných čísel. Sčítání prvků z ℓ^∞ je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z ℓ^∞ reálnými čísly. Pro $x = (x_n) \in \ell^\infty, y = (y_n) \in \ell^\infty$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = (x_n + y_n)$ a $\alpha x = (\alpha x_n)$. Dále pro $x = (x_n) \in \ell^\infty$ položme

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Definice 5. Definujme c_0 jako množinu všech posloupností reálných čísel $(x_n)_{n=1}^\infty$, splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Sčítání prvků z c_0 je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z c_0 reálnými čísly. Pro $x = (x_n) \in c_0$, $y = (y_n) \in c_0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = (x_n + y_n)$ a $\alpha x = (\alpha x_n)$. Dále pro $x = (x_n) \in c_0$ položíme

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Definice 6. Necht $p \in [1, \infty)$. Definujme ℓ^p jako množinu všech posloupností reálných čísel $(x_n)_{n=1}^\infty$ splňujících

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Sčítání prvků z ℓ^p je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z ℓ^p reálnými čísly. Pro

$$x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p, \quad y = (y_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

klademe

$$x + y := (x_n + y_n)_{n=1}^\infty, \quad \alpha x := (\alpha x_n)_{n=1}^\infty.$$

Dále pro $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p$ definujme normu

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definice 7. Necht $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 < p < \infty$, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ měřitelná. Položme

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

a označme $L^p(X, \mu)$ množinu takových f , pro které $\|f\|_p < \infty$. Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ podmnožina $\mathbb{R}^n$ s Lebesgueovou mírou, píšeme pouze $L^p(X)$.

Definice 8. Necht $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $g : X \rightarrow [0, \infty]$ měřitelná. Necht S je množina všech $\alpha \in \mathbb{R}$ takových, že $\mu(g^{-1}((\alpha, \infty])) = 0$. Je-li $S = \emptyset$, položme $\beta = \infty$. Je-li $S \neq \emptyset$, položme $\beta = \inf S$. Číslo β nazýváme esenciálním supremem g a značíme $\text{ess sup } g$.

Je-li $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ měřitelná, položme $\|f\|_\infty = \text{ess sup } |f|$ a označme $L^\infty(X, \mu)$ množinu takových f , pro které je $\|f\|_\infty < \infty$. Funkce z $L^\infty(X, \mu)$ nazýváme esenciálně omezené funkce.

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ podmnožina $\mathbb{R}^n$ s Lebesgueovou mírou, píšeme pouze $L^\infty(X)$.

$L^p(X, \mu)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.

Věta 9 (Hölderova a Minkowského nerovnost). Necht p, q jsou sdružené exponenty, $1 < p < \infty$. Necht $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ měřitelné. Pak

(i) (Hölderova nerovnost)

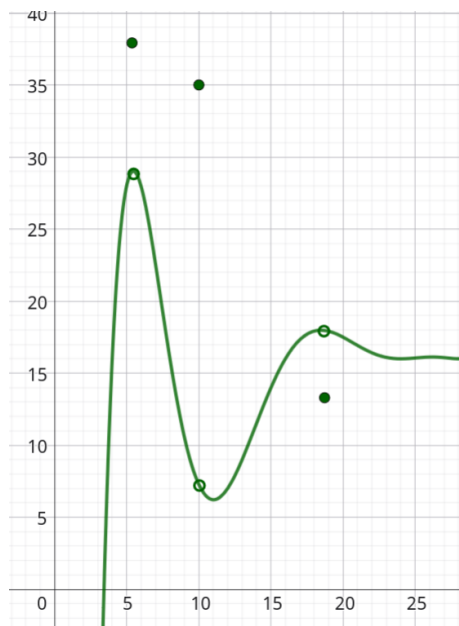
$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}},$$

(ii) (Minkowského nerovnost)

$$\left(\int_X (f + g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Příklady

- Je následující zobrazení norma na $L^1([0, 1])$ (chápeme-li $L^1([0, 1])$ jako prostor tříd ekvivalence vzhledem k rovnosti s.v.)?
 - $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$;
 - $\|f\| = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt$;
 - $\|f\| = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.
- Je následující zobrazení norma na prostoru $X = \{p : p \text{ je polynom na } [0, 1]\}$?
 - $\|p\| = \sup\{|p(t)| : t \in [0, 1]\}$;
 - $\|p\| = \int_0^1 p(t) dt$;
 - $\|p\| = |p(0)|$.
- Rozhodněte, pro která $p \in [1, \infty]$ následující posloupnosti (myšleno posloupnosti posloupností) konvergují v ℓ^p .
 - $\{1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \dots\}$, (n -krát);
 - $\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0, \dots\}$, (n -krát);
 - $\{1, 2, 3, \dots, n, 0, \dots, 0, \dots\}$;
 - $\{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots, 0, \dots\}$, (n -krát).
- Prostory ℓ^p :
 - $\ast$ Nechť $1 \leq p < \infty$. Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která posloupnost $a_n = n^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, patří do prostoru ℓ^p .
 - $\clubsuit$ Dokažte, že $\ell^1 \subseteq \ell^2$.
- Spočtěte $\|f\|_\infty$, kde



6. Spočtete $\|f\|_\infty$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0, 2], \\ 1, & x \in [0, 1) \cup (1, 2], \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

7. Určete $\|f\|_\infty$ pro Dirichletovu funkci. https://cs.wikipedia.org/wiki/Dirichletova_funkce

8. ☆ Najděte funkci f na $\mathbb{R}$, která je esenciálně omezená, ale není omezená.

9. Prostory L^p :

(a) ☸ Nechť $1 \leq p \leq \infty$. Najděte všechna $\gamma \in \mathbb{R}$, pro která funkce $f(x) = x^\gamma$, $x \in (0, 1)$, patří do prostoru $L^p(0, 1)$.

(b) ✱ Nechť $1 < p < q < \infty$. Dokažte, že $L^\infty(0, 1) \subseteq L^q(0, 1) \subseteq L^p(0, 1) \subseteq L^1(0, 1)$.

(c) ✿ Najděte $f \in L^1(0, 1) \setminus L^2(0, 1)$.

(d) ✱ Najděte $f \in L^3(\mathbb{R}) \setminus L^4(\mathbb{R})$.

(e) Najděte $f \in L^4(\mathbb{R}) \setminus L^3(\mathbb{R})$.

(f) ✱ Najděte $f \in L^1(0, 1)$ takovou, že $f \notin L^p(0, 1)$ pro žádné $p > 1$.

10. Dokažte následující větu:

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Definujme zobrazení

$$\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty), \quad \rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Potom ρ je metrika na X .

11. Dokažte, že následující dvojice tvoří reálný normovaný lineární prostor.

(a) $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\sup})$

(b) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$

(c) $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$

(3a) $x = (1, 1, 1, \dots)$	(9f) $f = 1/(x(1 + \log x)^2)$
(3b) $x = (0, 0, 0, \dots)$	(9g) $f = 1/(x(1 + \log x)^2)$
(3c) $x = (1, 2, 3, \dots)$	(9h) $f = 1/(x(1 + \log x)^2)$
(3d) $x = (0, 0, 0, \dots)$	(9i) $f = 1/(x(1 + \log x)^2)$
(4a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > -1$	(9j) $f = 1/(x(1 + \log x)^2)$
(4b) $ a > b $ pro $ a > 1$	(9k) $f = 1/(x(1 + \log x)^2)$
(8) Zkombinujte nějakou neomezenou funkci a Dirichle-	(9l) $f = 1/(x(1 + \log x)^2)$