



7. cvičení – Metrické prostory

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1

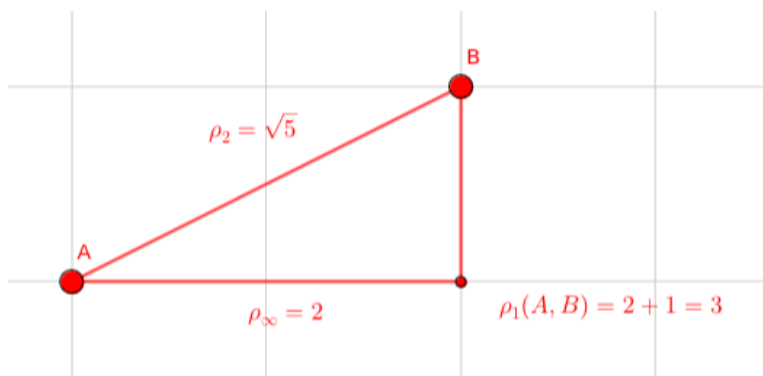
Definice 1. *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici (X, ρ) , kde X je množina, $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ je funkce splňující

- (1) $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (2) $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- (3) $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Funkci ρ nazýváme *metrika na X* .

Poznámka 2. Množinu $\mathbb{R}^n$ uvažujeme s metrikami

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|, \quad \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$



Úloha 3. Určete, zda jsou následující objekty metrickým prostorem (precizní důkaz není třeba)

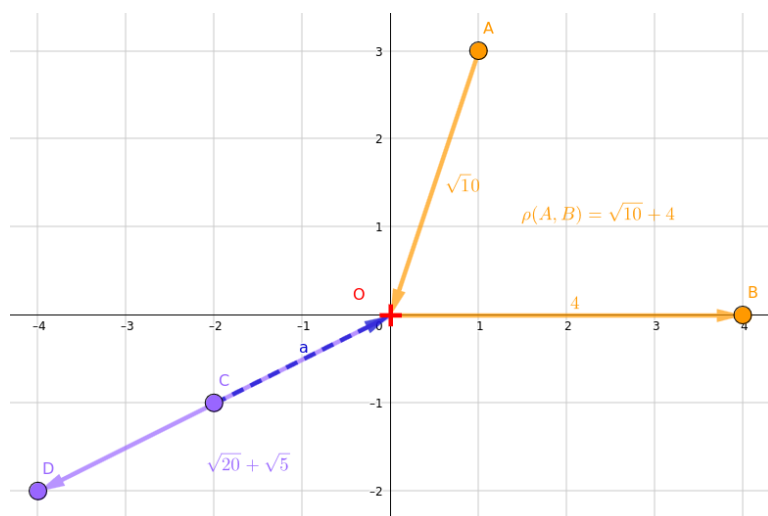
1. Na prostoru $\mathbb{C}([0, 2])$ spojitých funkcí na $[0, 2]$ uvažujeme

$$\rho(f, g) = |f(1) - g(1)|.$$

2. Na $\mathbb{R}$ uvažujeme $\rho(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ 1, & x < y. \end{cases}$

3. Prostor $\mathbb{R}^2$ s funkcí $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = \rho_2(x, x_0) + \rho_2(x_0, y)$, $x \neq y$, kde x_0 značí počátek $(0, 0)$ a ρ_2 značí eukleidovskou metriku v $\mathbb{R}^2$. Při měření vzdálenosti dvou různých bodů musíme vždy projít počátkem.

4. Taxi: Vzdálenost dvou míst v Praze měříme jako nejkratší možnou dráhu ujetou autem.



Definice 4. Necht (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, a $x \in X$. Vzdáleností bodu x od množiny A rozumíme číslo

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y); y \in A\}.$$

Úloha 5. ✱ Na $\mathbb{R}^2$ najděte vzdálenost bodu $P = [0, 1]$ od přímky $y = -x$ v metrice

1. ρ_1

2. ρ_2

3. ρ_∞

Zdroj: https://is.muni.cz/th/143424/fi_b/cd-priloha/skripta/mp/metricke-prostory-pro-obrazovku.pdf?so=nx

Úloha 6. ✿ V prostoru $\mathbb{C}([0, 1])$ uvažujeme supremovou metriku

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Najděte nejmenší vzdálenost funkce $f(x) = x$ od podprostoru tvořeného konstantními funkcemi.

Hejblátka v geogebra: <https://www.geogebra.org/calculator/veyfkgzhz>

Zdroj: <https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf>

Poznámka 7. Necht $p \in [1, \infty)$ a l_p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^\infty |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{n=0}^\infty |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}.$$

Poznámka 8. Uvažujeme množinu všech **omezených** reálných posloupností $\{x_n\}$ Pak definujeme metriku

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 9. ✿ Určete vzdálenost posloupnosti $x = \{1, 2, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots\}$ od množiny $M = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty : x_1 = x_2\}$ v prostorech

1. l_1 2. l_2 3. l_∞ Zdroj: <https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf>

2

Definice 10. Necht $x \in X$, $r > 0$. *Otevřenou kouli* rozumíme množinu

$$B(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) < r\}$$

Uzavřenou kouli rozumíme množinu

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) \leq r\}$$

Úloha 11. Načrtněte jednotkovou kouli v prostoru (R^3, ρ_1) , (R^3, ρ_2) , (R^3, ρ_∞) .

Úloha 12. Jak vypadá koule v diskretním metrickém prostoru?

Definice 13. Necht (X, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků X . Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje* k $y \in X$ v (X, ρ) , jestliže platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y) = 0$. Prvek y nazýváme *limitou posloupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ v (X, ρ) . *Konvergentní posloupností* v (X, ρ) rozumíme každou posloupnost prvků X , která má limitu v (X, ρ) .

Definice 14. Necht (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$. Řekneme, že množina M je *uzavřená* v X , jestliže platí: pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v M , splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaký prvek $x \in X$, pak platí: $x \in M$.

Definice 15. Necht $M \subset X$, $x \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *vnitřním bodem množiny* M , jestliže existuje $r > 0$ splňující $B(x, r) \subset M$.

Množina $M \subset X$ se nazývá *otevřená* v (X, ρ) , jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Poznámka 16. 1. Množina F v metrickém prostoru (X, ρ) je uzavřená právě tehdy, když $X \setminus F$ je otevřená.

2. Množina G v metrickém prostoru (X, ρ) je otevřená právě tehdy, když $X \setminus G$ je uzavřená.

Úloha 17. Určete, zda je interval $(0, 1)$ otevřená či uzavřená množin v metrickém prostoru (X, ρ) , jestliže

1. $X = (0, 1)$, $\rho = \rho_1$,3. $X = [0, 1]$ s diskretní metrikou,2. $X = \mathbb{R}$, $\rho = \rho_1$,4. $X = (0, 1) \cup (3, 4)$, $\rho = 3\rho_1$.

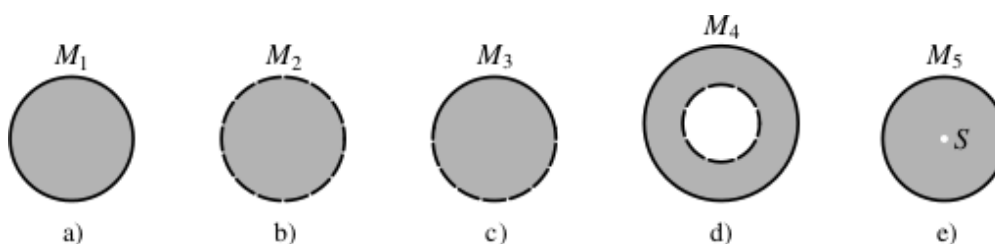
Definice 18. Necht $M \subset X$. Řekneme, že x je *hraničním bodem množiny* M , pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů nazýváme *hranice* a značíme ji ∂M .

Uzávěrem množiny M rozumíme množinu $\bar{M} = M \cup \partial M$.

Úloha 19. Určete, zda množina M je uzavřená, otevřená, co je její vnitřek, uzávěr, hranice (v $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou):

- | | | |
|-----------------|----------------------|----------------------------|
| 1. $M = (0, 1)$ | 3. $M = (0, 1]$ | 5. $M = [0, \infty)$ |
| 2. $M = [0, 1]$ | 4. $M = (0, \infty)$ | 6. $M = (-\infty, \infty)$ |
| 7. $\mathbb{N}$ | 8. $\mathbb{Q}$ | 9. $\mathbb{R}$ |

Úloha 20. Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, najděte hranici (v $\mathbb{R}^2$).



Úloha 21. Rozhodněte, zda platí (v obecném metrickém prostoru):

- | | |
|--|---|
| 1. $\clubsuit \overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ | 2. $\star \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |
|--|---|

Úloha 22. Najděte uzávěry grafů funkcí

- | | |
|---|------------------------|
| 1. | 2. Dirichletova funkce |
| $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ | 3. Riemannova funkce |

<https://www.geogebra.org/calculator/zapw8zma>

https://cs.wikipedia.org/wiki/Dirichletova_funkce

https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemannova_funkce

Úloha 23. Najděte netriviální $A \subset \mathbb{R}$, aby splňovala následující

- | | |
|--|--|
| 1. $\overline{A} = \partial A$ | 4. $\overline{\text{Int } A} \subsetneq A$ |
| 2. $\text{Int } \overline{A} \supsetneq A$ | 5. $\overline{\text{Int } A} \supsetneq A$ |
| 3. $\text{Int } \overline{A} \subsetneq A$ | 6. $\overline{\text{Int } A} = A$ |

(5) Nakreslete si obrázek. Jak se vlastně měří vzdálenost v daných metrikách?
 (6) Použijte hejblátko.
 (6) Vzdálenost dvou bodů je nejmenší, když jsou přesně stejné. To tedy asi nepůjde, ale nemohly by být stejné skoro na všech souřadnicích?
 (2.1) Uvažujte $\mathbb{R}^2$ bez mezikruží.
 (2.2) Uvažujte $(0, 1)$ a $(1, 2)$.