



6. cvičení – Residuová věta

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočítejte integrály, všechny křivky orientovány kladně:

(a) $\int_{\varphi} \frac{dz}{z(z-1)^2}$, φ je $|z| = \frac{1}{2}$.

Řešení: Funkce $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ má póly v bodech $z_0 = 0$ a $z_1 = 1$.

Uvnitř křivky φ leží pouze pól $z_0 = 0$.

Podle residuové věty platí:

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_0 f(z).$$

Navíc platí

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1.$$

Tedy podle residuové věty je

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i.$$

(b) $\int_{\varphi} \frac{dz}{1+z^{100}}$, φ je zadána rovnicí $|z| = 2$.

Řešení:

Uvnitř křivky φ leží celkem sto singularit $z_1, z_2, \dots, z_{100}$, které tvoří vrcholy pravidelného stoúhelníka na jednotkové kružnici.

Vně křivky φ ovšem leží pouze singularita v nekonečnu.

Platí

$$\sum_{i=1}^{100} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = -\operatorname{res}_{\infty} f(z).$$

Pro reziduum v nekonečnu dostáváme:

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0.$$

Z toho tedy vyplývá

$$\int_{\varphi} \frac{1}{1+z^{100}} dz = 0.$$

(c) $\int_{\varphi} \frac{dz}{(z^2-1)(z-3)^2}$, φ je uzavřená křivka obsahující ve svém vnitřku body -1 a 1 a ve svém vnějšku bod 3.

Řešení:

Funkce má singularity v bodech 1 a -1 (póly násobnosti jedna).

Dále máme

$$\operatorname{res}_1 \frac{1}{(z-1)(z-3)^2} = \frac{1}{2 \cdot (-2)^2}$$

$$\operatorname{res}_{-1} \frac{1}{(z^2 - 1)(z - 3)^2} = \frac{1}{(-2) \cdot (-4)^2}$$

Dostáváme tak

$$\int_{\varphi} \frac{1}{(z^2 - 1)(z - 3)^2} dz = 2\pi i (\operatorname{res}_1 f + \operatorname{res}_{-1} f) = 2\pi i \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{32} \right) = \frac{3\pi i}{16}.$$

- (d) $\int_{\varphi} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz$, φ je zadána rovnicí $\varphi(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení: Funkce má uvnitř křivky φ singularitu v bodě 2, a to pól druhého řádu.

Reziduum v tomto bodě spočítáme pomocí vzorce:

$$\operatorname{res}_2 f = \lim_{z \rightarrow 2} ((z-2)^2 f(z))' = \lim_{z \rightarrow 2} \left(\frac{z}{z-1} \right)' = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z-1) \cdot 1 - z \cdot 1}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{-1}{(z-1)^2} = -1.$$

Podle reziduové věty tedy platí

$$\int_{\varphi} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_2 f = -2\pi i.$$

- (e) $\int_{\varphi} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz$, φ je zadána rovnicí $|z+1+i| = 2$.

Řešení:

Funkce

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)}.$$

má póly v bodech $z_0 = 0$ a $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

Uvnitř křivky leží body 0 a $-i$.

Dále platí, že

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_0 f(z) &= 1, \\ \operatorname{res}_{-i} f(z) &= -\frac{e^{-i}}{2}. \end{aligned}$$

Podle reziduové věty tedy platí:

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{res}_0 f(z) + \operatorname{res}_{-i} f(z)) = 2\pi i \left(1 - \frac{e^{-i}}{2} \right).$$

- (f) $\int_{\varphi} \frac{dz}{(z-3)(z^{10}-1)}$, φ je kružnice se středem v 0 a poloměrem 2.

Řešení:

Uvnitř kružnice φ se nachází deset pólů funkce $f(z)$. Z početního hlediska je však výhodnější vypočítat rezidua v singularitách, které leží ve mimo křivku φ , tj. v bodech 3 a ∞ .

Máme

$$\sum_{z^{10}=1} \operatorname{res}_z f(z) = -\operatorname{res}_3 f(z) - \operatorname{res}_{\infty} f(z).$$

Přitom platí, že

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0,$$

a dále

$$\operatorname{res}_3 f(z) = \frac{1}{3^{10} - 1}.$$

Tedy

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{(z-3)(z^{10}-1)} = 2\pi i \left(0 + \frac{1}{3^{10}-1} \right).$$

2. (a) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{5}{4} - \cos x}$

Uvažujme integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4 \cos x} = \int_{\gamma} \frac{1}{5 - 4 \frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \frac{1}{iz} dz,$$

kde $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Úpravou dostaneme:

$$-\frac{2}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} = -2i \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=1/2} \left(\frac{1}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} \right).$$

Spočítáme reziduum v $z = \frac{1}{2}$:

$$\operatorname{res}_{1/2} = \lim_{z \rightarrow 1/2} (z - \frac{1}{2}) \frac{1}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 2} = \frac{1}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

Dosadíme do integrálu:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4 \cos x} = -2i \cdot 2\pi i \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) = 8\pi/3.$$

(b) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3\cos x}$

Řešení: Řešíme integrál

$$\int_{\varphi} \frac{1}{5 + 3 \frac{z^2+1}{2z}} \frac{1}{iz} dz,$$

kde φ je jednotková kružnice.

Ze dvou singularit je uvnitř jednotkové kružnice pouze $z_1 = -\frac{1}{3}$, a příslušné reziduum je

$$\operatorname{res}_{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4i}.$$

Pak

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3 \cos x} = \frac{\pi}{2}$$

(c) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5-4\cos x)^2}$

Řešení: Řešíme integrál

$$\int_{\varphi} \frac{1}{(5 - 4 \frac{z^2+1}{2z})^2} \frac{1}{iz} dz,$$

kde φ je jednotková kružnice.

Ze dvou singularit je uvnitř jednotkové kružnice pouze $z_1 = \frac{1}{2}$, a příslušné reziduum je

$$\operatorname{res}_{\frac{1}{2}} = \frac{5}{27i}.$$

Pak

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 - 4 \cos x)^2} = \frac{10\pi}{27} = \frac{\pi}{2}$$

(d) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cos x + a^2}, a \in \mathbb{R}, |a| < 1$

Řešení:

Uvažujme integrál

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cos x + a^2} = \int_C \frac{1}{1 - 2a \frac{z^2+1}{2z} + a^2} \cdot \frac{1}{iz} dz,$$

kde C je jednotková kladně orientovaná kružnice se středem v počátku.

Po úpravách dostaneme

$$\frac{1}{i} \int_C \frac{1}{-a(z-a)(z-\frac{1}{a})} dz.$$

Integrovaná funkce má uvnitř jednotkového kruhu singularitu v bodě $z = a$ (jednoduchý pól).

Podle reziduové věty tedy platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cos x + a^2} = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_a \frac{1}{-a(z-a)(z-\frac{1}{a})} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

(e) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b \cos x}, a > b > 0$

Řešení: Řešíme integrál

$$\int_{\varphi} \frac{1}{a + b \frac{z^2+1}{2z}} \frac{1}{iz} dz,$$

kde φ je jednotková kružnice.

Singularities jsou v bodech $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$.

Uvnitř jednotkového kruhu leží pouze jednonásobný pól $z_0 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$.

Z reziduové věty pak máme

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

3. (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

Řešení:

Podle Lemmatu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2 + 2z + 5},$$

kde jmenovatel má kořeny

$$z_1 = -1 + 2i, \quad z_2 = -1 - 2i,$$

kteřé jsou póly prvního řádu.

Z nichž v horní polorovině leží pouze bod z_1 .

Reziduum v z_1 spočítáme podle vzorce pro jednoduchý pól:

$$\operatorname{res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{1}{z^2 + 2z + 5} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{2z + 2} = \frac{1}{4i}$$

Výsledek integrálu je tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$

Řešení: Protože integrovaná funkce je sudá, je možné počítat

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

Po rozložení jmenovatele na součin vyjde

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}.$$

Funkce v integrálu má póly v kořenech jmenovatele, což jsou body

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = 2i, \quad z_4 = -2i,$$

z nichž v horní polorovině leží pouze z_1 a z_3 .

Rezidua spočítáme jako

$$\operatorname{res}_i \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{(z - i)(z + i)(z^2 + 4)} = \frac{1}{2i(i^2 + 4)} = \frac{1}{6i},$$

$$\operatorname{res}_{2i} \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 2i)(z + 2i)} = \frac{1}{((2i)^2 + 1) \cdot 2 \cdot 2i} = -\frac{1}{12i}.$$

Součet reziduí v horní polorovině je

$$\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i} = \frac{1}{12i}.$$

Podle reziduové věty je integrál roven

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{12i} = \frac{\pi}{6}.$$

A tedy

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$

Řešení:

Uvažujme integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Nejprve nalezneme póly funkce:

$$z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -1 - i,$$

které jsou póly druhého řádu.

Použijeme reziduovou větu a spočítáme reziduum v pólu z_1 v horní polorovině.

Pro pól druhého řádu je reziduum dáno vztahem

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \left((z - z_1)^2 \frac{1}{(z^2 + 2z + 2)^2} \right)' = -\frac{i}{4}$$

Podle reziduové věty integrál po reálné ose je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

Řešení:

Uvažujme integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}.$$

Funkce

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$$

má póly prvního řádu v bodech

$$z = i, \quad z = -i, \quad z = 2i, \quad z = -2i.$$

Spočítejme rezidua v pólech v horní polorovině $z = i$ a $z = 2i$.

$$\operatorname{res}_i f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z}{(z - i)(z + i)(z - 2i)(z + 2i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z}{(z + i)(z - 2i)(z + 2i)} = \frac{1}{6}.$$

Podobně reziduum v $z = 2i$:

$$\operatorname{res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z}{(z - i)(z + i)(z + 2i)} = -\frac{1}{6}.$$

Součet reziduí v horní polorovině je

$$\operatorname{res}_{z=i} f(z) + \operatorname{res}_{z=2i} f(z) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0.$$

Odtud

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = 0.$$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

Řešení:

Uvažujme integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Funkce má póly dané rovnicí $1+z^4=0$, tedy kořeny rovnice

$$z^4 = -1 = e^{i\pi(2k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

které jsou:

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, & z_2 &= e^{3i\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_3 &= e^{5i\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, & z_4 &= e^{7i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

V horní polorovině leží póly z_1 a z_2 .

Každý z nich je pólem prvního řádu, jelikož derivace $4z^3$ není v těchto bodech nulová.

Rezidua spočítáme podle vzorce pro jednoduchý pól:

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{4z_k^3}, \quad k = 1, 2.$$

Integral pak podle reziduové věty:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = 2\pi i \left(\frac{1}{4z_1^3} + \frac{1}{4z_2^3} \right).$$

Použitím vztahů $z_k = e^{i\theta_k}$ a vzorců pro součet komplexních exponenciál zjistíme, že

$$\frac{1}{z_1^3} + \frac{1}{z_2^3} = 2 \operatorname{Re} \left(e^{-3i\pi/4} \right) = -\sqrt{2}.$$

Tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} \cdot (-\sqrt{2}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$