



6. cvičení – Residuová věta

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Funkci $f(z)$ nazveme *holomorfní v ∞* , je-li funkce $f(1/z)$ holomorfní v 0. *Laurantovou řadou se středem v ∞* rozumíme řadu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

přičemž její *regulární částí* rozumíme $\sum_{n=-\infty}^0 a_n z^n$ (tedy tu část, která je holomorfní v ∞) a *hlavní částí* řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. *Reziduem v ∞* rozumíme $-a_1$.

Poznámka 2. Bod ∞ je k -násobným pólem funkce f , jestliže 0 je pól násobnosti k transformované funkce $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Věta 3. Funkce f má v ∞ pól násobnosti k právě tehdy, když

$$f(z) = z^k g(z),$$

kde g je holomorfní funkce v okolí ∞ s vlastní a nenulovou limitou v ∞ .

Věta 4. 1. Je-li ∞ odstranitelná singularita funkce f , pak

$$\operatorname{res}_{\infty} f = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z).$$

2. Je-li ∞ k -násobným pólem funkce f , pak

$$\operatorname{res}_{\infty} f = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(z^{k+2} f(z)^{(k+1)} \right)$$

3.

$$\operatorname{res}_{\infty} f = \operatorname{res}_0 \frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

Věta 5 (Reziduová). Nechť φ je jednoduše uzavřená křivka, probíhaná v kladném smyslu vzhledem ke svému vnitřku. Nechť dále jsou $a_1, a_2, \dots, a_k$ body z jejího vnitřku. Je-li f holomorfní na $\operatorname{Int} \varphi \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int} \varphi} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$, pak je

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{a_j} f.$$

Věta 6. Nechť f je holomorfní v $\mathbb{C}$ až na konečně mnoho izolovaných singularit $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, k$. Pak je

$$\sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{a_j} f + \operatorname{res}_{\infty} f = 0.$$

Lemma 7. Necht R je racionální funkce, $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že stupeň Q je alespoň o 2 větší než stupeň P a Q nemá kořeny na reálné ose. Necht M je množina všech kořenů Q , které mají kladnou imaginární část. Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{w \in M} \operatorname{res}_w R(z)$$

Lemma 8. Necht Q je racionální lomená funkce, necht izolované singulární body funkce

$$f(z) = Q\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right)$$

neleží na jednotkové kružnici.

Pak

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} \frac{1}{iz} Q\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right),$$

kde z_k jsou póly ležící ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice.

Příklady

1. Spočtěte integrály, všechny křivky orientovány kladně:

- (a) $\int_{\varphi} \frac{dz}{z(z-1)^2}$, φ je zadána rovnicí $|z| = \frac{1}{2}$.
- (b) $\oint \int_{\varphi} \frac{dz}{1+z^{100}}$, φ je zadána rovnicí $|z| = 2$.
- (c) $\int_{\varphi} \frac{dz}{(z^2-1)(z-3)^2}$, φ je uzavřená křivka obsahující ve svém vnitřku body -1 a 1 a ve svém vnějšku bod 3.
- (d) $\int_{\varphi} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz$, φ je zadána rovnicí $\varphi(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
- (e) $\int_{\varphi} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz$, φ je zadána rovnicí $|z+1+i| = 2$.
- (f) $\int_{\varphi} \frac{dz}{(z-3)(z^{10}-1)}$, φ je kružnice se středem v 0 a poloměrem 2.

- 2. (a) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{5}{4} - \cos x}$ (c) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5-4\cos x)^2}$
- (b) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3\cos x}$ (d) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2}$, $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$
- (e) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x}$, $a > b > 0$
- 3. (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ (d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$
- (b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$ (e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$
- (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$