



4. cvičení – Laurentovy řady

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Zjistěte obor konvergence Laurentovy řady

(a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}(z-1)^n$

Řešení: Uvažujme nejprve její regulární část. Pak

$$R = 1/\limsup \sqrt[n]{2^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Pro hlavní část pak máme

$$r = \limsup \sqrt[n]{2^{-|n|}} = \frac{1}{2}$$

Tedy řada konverguje na mezikruží

$$\frac{1}{2} < |z-1| < 2.$$

Na hranici nekonverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

(b) $\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$

Řešení: **Řešení:** Uvažujme nejprve její regulární část. Pak

$$R = 1/\limsup \sqrt[n]{3^n} = \frac{1}{3}.$$

Pro hlavní část pak máme

$$r = \limsup \sqrt[n]{2^{-n}} = \frac{1}{2}$$

Tedy řada nekonverguje, protože by muselo platit, že $\frac{1}{2} < |z| < \frac{1}{3}$, což je spor.

(c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}(z-1)^n$

Řešení: Uvažujme nejprve její regulární část. Pak

$$R = 1/\limsup \sqrt[n]{1/2^{n^2}} = 1/(\lim 1/2^n) = \infty.$$

Pro hlavní část pak máme

$$r = \limsup \sqrt[n]{1/2^{n^2}} = 0$$

Tedy řada konverguje na (mezikruží)

$$0 < |z-1|$$

V bodu 1 řada nekonverguje, protože jej ani nelze dosadit.

$$(d) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1} (z - i)^n$$

Řešení: Uvažujme nejprve její regulární část. Pak

$$R = 1 / \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{3^n + 1}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

(Možno spočítat 2 policajty.)

Pro hlavní část pak máme

$$r = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{3^{-n} + 1}} = 1.$$

(Pozor, důležitější člen ve zlomku je 1 a nikoli 3^{-n} .)

Tedy řada konverguje na mezikruží

$$1 < |z - i| < 3.$$

Na hranici nekonverguje, protože nespĺňuje nutnou podmínku konvergence.

2. Rozviňte funkci do Laurentovy řady na oblastech, kde to lze.

$$(a) f(z) = \frac{\cos z}{z} \text{ v } z_0 = 0$$

Řešení: Použijeme Taylorův rozvoj funkce $\cos z$. Dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!}$$

pro $z \neq 0$.

$$(b) f(z) = z^3 e^{1/z} \text{ v } z_0 = 0$$

Řešení: Použijeme Taylorův rozvoj funkce e^z . Dostaneme

$$f(z) = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3-n}}{n!}$$

pro $z \neq 0$.

$$(c) f(z) = \frac{1}{1+z} \text{ v } z_0 = 0$$

Řešení: Použijeme Taylorův rozvoj geometrické řady. Dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{1 - (-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

pro $|z| < 1$.

Funkci lze ale rozvinout i pro $|z| > 1$. Pak je $|\frac{1}{z}| < 1$ a z geometrické řady

$$f(z) = \frac{1}{z(1 + \frac{1}{z})} = \frac{\frac{1}{z}}{1 - (-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

(d) $f(z) = \frac{1}{1+z}$ v $z_0 = -1$

Řešení: Funkce už je rozvinutá, Laurentova řada obsahuje právě 1 člen, totiž

$$\frac{1}{z - (-1)}.$$

(e) $f(z) = \frac{1}{1+z}$ v $z_0 = 1$

Řešení: Půjčíme a vrátíme, abychom se dostali ke geometrické řadě

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{z-1}{2}\right)}$$

Pro $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$ máme

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{z-1}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n$$

Pro $\left|\frac{z-1}{2}\right| > 1$ máme

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1 + \frac{2}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z-1} \left(-\frac{2}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(z-1)^{n+1}}$$

3. Najděte rozvoj funkce v bodě ∞ funkce

$$f(z) = z^2 e^{1/z}.$$

Řešení: Rozvineme pomocí Taylorova rozvoje funkce e^z . Dostaneme

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

pro $z \neq 0$.

4. Necht' $0 < r < R < \infty$. Najděte Laurentovy řady konvergující na

(a) $\{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C}; |z| > r\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C}; r < |z| < R\}$

Řešení:

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{R^n}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{z^n}$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{R^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{z^n}$$

5. Klasifikujte následující singularity:

(a) $\frac{1}{z^2(1-z)}$, $z_0 = 0$

Řešení: Z Lemmatu 10 jde o pól násobnosti 2.

(b) $\frac{\sin z}{z}$, $z_0 = 0$

Řešení: Laurentův rozvoj

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

Tedy jde o odstranitelnou singularitu.

(c) $e^{1/z}$, $z_0 = 0$

Řešení: Rozvineme pomocí Taylora

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Odtud jde o podstatnou singularitu.

(d) $z^2 e^{1/z}$, $z_0 = \infty$

Řešení: Z předchozího příkladu máme Laurentův rozvoj:

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

Z toho plyne, že v ∞ je pól násobnosti 2. (V nekonečnu je prohozená hlavní a regulární část Laurentovy řady, tedy sledujeme mocniny u z^n místo u $1/z^n$.)

(e) $\sin z$, $z_0 = \infty$

Řešení: Rozvineme

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Hlavní část má nekonečné množství nenulových koeficientů, tedy jde o podstatnou singularitu.

Jiné řešení: $\lim_{z \rightarrow \infty} \sin z$ neexistuje (stačí uvažovat reálný $\sin x$), tedy jde o podstatnou singularitu.

(f) $\frac{\sin z}{z^2}$, $z_0 = 0$

Řešení: Pól násobnosti 1. Plyne přímo z Lemmatu 10.

6. Určete residuum

(a) $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^3}$

Řešení: Z Laurentova rozvoje

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{6} + \frac{z^2}{120} + \dots$$

Tedy

$$\operatorname{res}_0 f = a_{-1} = 0.$$

(b) $\operatorname{res}_{\infty} z^2 e^{1/z}$

Řešení: Z předchozích příkladů máme rozvoj

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

Tedy

$$\operatorname{res}_{\infty} f = -a_1 = -\frac{1}{6}$$

(c) $\operatorname{res}_{2i} \frac{z+2}{(z-2i)^2(z+1)}$

Řešení: Funkce má ve $2i$ pól násobnosti 2. Pro výpočet reziduí použijeme limitu derivace

$$\operatorname{res}_{2i} f = \lim_{z \rightarrow 2i} \left(\frac{z+2}{z+1} \right)' = \lim_{z \rightarrow 2i} \left(\frac{-1}{(z+1)^2} \right)' = -\frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{3+4i}{25}$$

(d) $\operatorname{res}_{k\pi} z \cotg z, k \in \mathbb{Z}$

Řešení:

Nejprve spočteme pomocí Věty 12 (b)

$$\operatorname{res}_{k\pi} \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\cos z}{(\sin z)'}(k\pi) = \frac{\cos k\pi}{\cos k\pi} = 1$$

Pak ze 12 (a) plyne

$$\operatorname{res}_{k\pi} z \cotg z = (k\pi) \operatorname{res}_{k\pi} \cotg z = k\pi \cdot 1 = k\pi.$$

(e) $\operatorname{res}_{\infty} e^{1/z}$

Řešení: Z Laurentova rozvoje máme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

Odtud

$$\operatorname{res}_{\infty} e^{\frac{1}{z}} = -a_1 = -1$$

(f) $\operatorname{res}_{\infty} z e^{1/z}$

Řešení: Z Laurentova rozvoje máme

$$f(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n-1}}$$

Odtud

$$\operatorname{res}_{\infty} e^{\frac{1}{z}} = -a_1 = -\frac{1}{2}$$

(g) $\operatorname{res}_0 z^2 \sin \frac{1}{z}$

Řešení: Z Laurentova rozvoje máme

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n-1}}$$

Odtud

$$\operatorname{res}_0 f = a_1 = -\frac{1}{6}$$

(h) $\operatorname{res}_{\pi/4} \frac{z^3 \sin z}{\cos 2z}$

Řešení: Jedná se o jednonásobný kořen, tedy

$$\operatorname{res}_{\pi/4} \frac{z^3 \sin z}{\cos 2z} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{z^3 \sin z}{(\cos 2z)'} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{z^3 \sin z}{(-2 \sin 2z)} = -\frac{\sqrt{2}\pi^3}{256}$$

7. Nechť z_0 je izolovaná singularita funkce f a g . Ukažte, že

$$\operatorname{res}_{z_0} \alpha f + \beta g = \alpha \operatorname{res}_{z_0} f + \beta \operatorname{res}_{z_0} g, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Řešení: Plyne z rozvoje do řady.

8. Nechť je z_0 pól násobnosti k funkce $f(z)$. Ukažte, že z_0 je pól násobnosti $l+k$ funkce $\frac{f(z)}{(z-z_0)^l}$, $l \in \mathbb{N}$.

Řešení: Plyne z Lemmatu 10.

9. Nechť funkce f má podstatnou singularitu v bodě z_0 a funkce g tam nemá podstatnou singularitu. Jakou singularitu má v bodě z_0 funkce $f+g$?

Řešení: Podstatnou singularitu. Platí, že $\lim_{z \rightarrow z_0} f$ neexistuje a $\lim_{z \rightarrow z_0} g$ existuje (konečná či nekonečná). Pak $\lim_{z \rightarrow z_0} f+g$ neexistuje, tedy jde o podstatnou singularitu.