



4. cvičení – Laurentovy řady

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. • Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ a $R = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Pak uvedená řada konverguje absolutně pro $|z - z_0| < R$, diverguje pro $|z - z_0| > R$. Pro libovolné kladné $\rho < R$ konverguje stejnoměrně pro $|z - z_0| \leq \rho$.

- Pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z - z_0)^n}$ existuje číslo $r \in [0, \infty]$ takové, že tato řada konverguje absolutně na množině $K = \{z; |z - z_0| > r\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině K . Platí $r = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Věta 2. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s **kladnými** členy, splňující podmínku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak také

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Definice 3. *Laurentova řada* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ se definuje rovností

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

První část Laurentovy řady se nazývá *regulární část*, druhá se nazývá *hlavní část*. Laurentova řada konverguje, konvergují-li obě její části.

Věta 4. Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ existují čísla $0 \leq r \leq R \leq \infty$ tak, že řada konverguje absolutně na množině $M = \{z, r < |z - z_0| < R\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině M .

Součtem této řady je holomorfní funkce v mezikruží M , její derivace a primitivní funkce se získají derivováním a integrováním řady člen po členu.

Věta 5. Nechť $0 \leq r \leq R \leq \infty$ a funkce f je holomorfní v mezikruží M o středu z_0 a poloměrech r, R . Potom

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

pro nějaká $a_n \in \mathbb{C}$ a všechna $z \in M$. Navíc

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

kde φ je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží M a obsahující bod z_0 ve svém vnitřku.

Definice 6. Funkci $f(z)$ nazveme *holomorfní v ∞* , je-li funkce $f(1/z)$ holomorfní v 0. *Laurentovou řadou se středem v ∞* rozumíme řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

přičemž její *regulární částí* rozumíme $\sum_{n=-\infty}^0$ (tedy tu část, která je holomorfní v ∞) a *hlavní částí* řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. *Reziduem v ∞* rozumíme $-a_1$.

Definice 7. Je-li $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, řekneme, že f má v bodě a *izolovanou singularitu*.

Definice 8. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - w)^n$ je Laurentova řada funkce f . Singularita ve w se nazývá

1. *odstranitelná*, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n
2. *pól řádu k* , jestliže $a_k \neq 0$ a $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$
3. *podstatná*, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných n .

Věta 9. Nechť w je izolovaná singularita funkce f

1. v bodě w je odstranitelná singularita, právě když $\lim_{z \rightarrow w} f(z) \in \mathbb{C}$
2. v bodě w je pól, právě když $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = \infty$
3. v bodě w je podstatná singularita, právě když $\lim_{z \rightarrow w} f(z)$ neexistuje.

Lemma 10. Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f , pak je z_0 pólem f tehdy a jen tehdy, jestliže existuje $m \in \mathbb{N}$ a funkce h holomorfní na nějakém okolí $D(z_0, r)$, $h(z_0) \neq 0$, že platí

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} h(z),$$

pro $z \in D(z_0, r)$ (m je pak násobnost pólu).

Definice 11. Nechť je izolovaná singularita funkce f . *Reziduem* funkce f v bodě z_0 , píšeme $\text{res}_{z_0} f$, nazýváme koeficient a_{-1} u $(z - z_0)^{-1}$ v Laurentově řadě f v bodě z_0 .

Obecný vzorec pro výpočet rezidua

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} f(z) dz,$$

kde φ je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží M (z definice Laurentovy řady) a obsahující bod z_0 ve svém vnitřku.

Věta 12. Buď $a \in \mathbb{C}$.

1. Buď f holomorfní v a , g ať má v a jednoduchý pól. Potom

$$\text{res}_a(fg) = f(a) \text{res}_a(g).$$

2. Nechť f, g , jsou holomorfní v a , g ať má v a jednoduchý kořen. Pak

$$\text{res}_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

3. Ať f má v a pól násobnosti $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\operatorname{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} [(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

Věta 13 (L'Hospital). Necht' f a g jsou holomorfní funkce v bodě w a necht' $f(w) = g(w) = 0$. Pak

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow w} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Hint

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{pro } |z| < 1$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

Příklady

1. Zjistěte obor konvergence Laurentovy řady

$$(a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} (z-1)^n$$

$$(c) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} (z-1)^n$$

$$(b) \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$$

$$(d) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1} (z-i)^n$$

2. Rozviňte funkci do Laurentovy řady na oblastech, kde to lze

$$(a) f(z) = \frac{\cos z}{z} \quad \text{v } z_0 = 0$$

$$(d) \heartsuit f(z) = \frac{1}{1+z} \quad \text{v } z_0 = -1$$

$$(b) f(z) = z^3 e^{1/z} \quad \text{v } z_0 = 0$$

$$(e) \spadesuit f(z) = \frac{1}{1+z} \quad \text{v } z_0 = 1$$

$$(c) \star f(z) = \frac{1}{1+z} \quad \text{v } z_0 = 0$$

3. Najděte rozvoj funkce v bodě ∞ funkce

$$f(z) = z^2 e^{1/z}.$$

4. Necht' $0 < r < R < \infty$. Najděte Laurentovy řady konvergující na

$$(a) \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$$

$$(b) \{z \in \mathbb{C}; |z| > r\}$$

$$(c) \{z \in \mathbb{C}; r < |z| < R\}$$

5. Klasifikujte následující singularity

- (a) $\frac{1}{z^2(1-z)}, z_0 = 0$ (d) $z^2 e^{1/z}, z_0 = \infty$
 (b) $\frac{\sin z}{z}, z_0 = 0$ (e) $\sin z, z_0 = \infty$
 (c) $e^{1/z}, z_0 = 0$ (f) $\frac{\sin z}{z^2}, z_0 = 0$

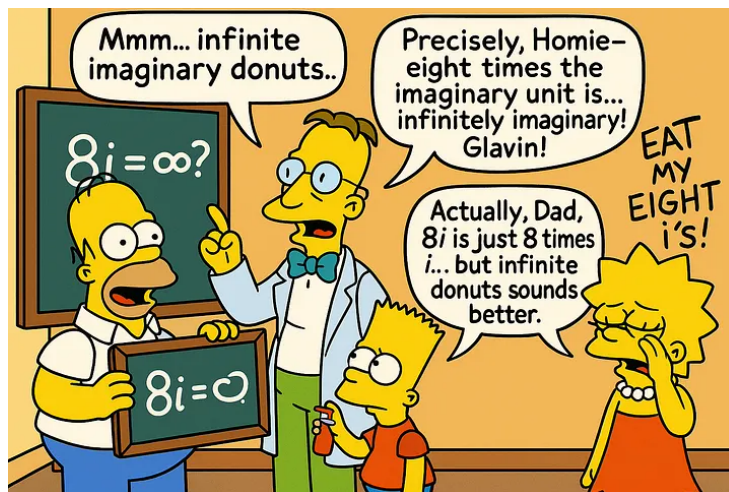
6. Určete residuum

- (a) $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^3}$ (e) $\operatorname{res}_\infty e^{1/z}$
 (b) $\operatorname{res}_\infty z^2 e^{1/z}$ (f) $\operatorname{res}_\infty z e^{1/z}$
 (c) $\operatorname{res}_{2i} \frac{z+2}{(z-2i)^2(z+1)}$ (g) $\operatorname{res}_0 z^2 \sin \frac{1}{z}$
 (d) $\operatorname{res}_{k\pi} z \cot z, k \in \mathbb{Z}$ (h) $\operatorname{res}_{\pi/4} \frac{z^3 \sin z}{\cos 2z}$

7. Necht z_0 je izolovaná singularita funkce f a g . Ukažte, že

$$\operatorname{res}_{z_0} \alpha f + \beta g = \alpha \operatorname{res}_{z_0} f + \beta \operatorname{res}_{z_0} g, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

8. Necht je z_0 pól násobnosti k funkce $f(z)$. Ukažte, že z_0 je pól násobnosti $l+k$ funkce $\frac{f(z)}{(z-z_0)^l}, l \in \mathbb{N}$.
 9. Necht funkce f má podstatnou singularitu v bodě z_0 a funkce g tam nemá podstatnou singularitu. Jakou singularitu má v bodě z_0 funkce $f+g$?



<https://medium.com/math-games/can-you-understand-these-4-high-level-simpson-math-jokes-8d55a5f113d4>

(2c) Rozvrňte na $ z < 1$! $ z > 1$. Pak $f = \frac{1}{z}$	(2d) $f = \frac{z}{1-z}$. Rozvoj může mít i konečně členů.
(5a) Lemma 10.	(6h) Věta 12.
(6c) Věta 12.	(6d) Věta 12.