



3. cvičení – Křivkový integrál

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Není-li řečeno jinak, jsou uzavřené křivky orientovány kladně. Křivka mezi body a a b začíná v bodě a a končí v bodě b .

1. Spočtěte integrál $\int_{\gamma} f(z) dz$

(a) $f(z) = \operatorname{Im} z$, γ je úsečka z bodu 0 do bodu $1 + i$

Řešení: Parametrizace křivky: $\gamma(t) = t + it$, $t \in [0, 1]$. Pak $\gamma'(t) = 1 + i$.

Integrál:

$$\int_0^1 t(1 + i) dt = \left[\frac{t^2}{2}(1 + i) \right]_0^1 = \frac{1}{2}(1 + i)$$

(b) $f(z) = \operatorname{Re} z$, γ je oblouk paraboly z bodu 0 do bodu $1 + i$, s parametrickou rovnicí $z(t) = t + it^2$, $t \in [0, 1]$.

Řešení: Parametrizace křivky: $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [0, 1]$. Pak $\gamma'(t) = 1 + i2t$.

Integrál:

$$\int_0^1 t(1 + i2t) dt = \int_0^1 t + i2t^2 dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{2}{3}t^3i \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2i}{3}$$

(c) $f(z) = |z|^2$, γ je oblouk křivky $y = x^2$, z počátku do bodu $1 + i$.

Řešení: Parametrizace křivky: $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [0, 1]$. Pak $\gamma'(t) = 1 + i2t$.

Integrál:

$$\int_0^1 (t^2 + t^4)(1 + i2t) dt = \int_0^1 (t^2 + t^4) + 2i(t^3 + t^5) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4}2i + \frac{t^6}{6}2i \right]_0^1 = \frac{8}{15} + \frac{5i}{6}$$

(d) $f(z) = \frac{1}{z-i}$, γ je $|z - i| = \frac{1}{2}$.

Řešení: Parametrizace křivky: $\gamma(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pak $\gamma'(t) = \frac{1}{2}ie^{it}$.

Integrál:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{2}e^{it}} \frac{1}{2}ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

(e) $f(z) = \operatorname{Re} z$, γ je lomená čára spojující body 0, 1 a $1 + i$.

Řešení: Parametrizace křivky: $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0, 1]$, a $\gamma_2(t) = 1 + it$, $t \in [0, 1]$. Pak $\gamma'_1(t) = 1$ a $\gamma'_2(t) = i$.

Integrál:

$$\int_0^1 t dt + \int_0^1 i dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + [it]_0^1 = \frac{1}{2} + i$$

2. Cauchyho Věta - Spočtěte integrál $\int_{\gamma} f(z) dz$

(a) $f(z) = z^2$, γ je $|z - 3 + 5i| = \frac{1}{2}$.

Řešení: Funkce f je spojitá a holomorfní na celém $\mathbb{C}$ (polynom). Křivka γ je uzavřená cesta (kružnice). Tedy z Cauchyovy věty je

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

- (b) $f(z) = \sin iz$, γ je libovolná křivka spojující body 0 a πi .

Řešení: Funkce f je spojitá a holomorfní na celém $\mathbb{C}$. Její primitivní funkce $F = \frac{-\cos(iz)}{i}$. Tedy z Cauchyovy věty je

$$\int_{\gamma} f = F(\pi i) - F(0) = \frac{-\cos(i\pi i)}{i} - \frac{-\cos(0)}{i} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i} = -2i.$$

- (c) $f(z) = e^z$, γ je obvod obdélníka s vrcholy $-1, 1, 1+i, -1+i$.

Řešení: Funkce f je spojitá a holomorfní na celém $\mathbb{C}$. Křivka γ je uzavřená cesta. Tedy z Cauchyovy věty je

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

- (d) $f(z) = \frac{e^z}{z-i}$, γ je $|z+i| = 1$.

Řešení: Funkce f je spojitá a holomorfní na celém $\mathbb{C} \setminus \{i\}$, speciálně tedy na množině $M = \{z, \operatorname{Im} z < \frac{i}{2}\}$ (dolní polorovina pod bodem $\frac{i}{2}$).

Křivka γ je uzavřená cesta. Tedy z Cauchyovy věty je

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

3. Cauchyův vzorec - Spočtěte integrál $\int_{\gamma} g(z) dz$

- (a) $g(z) = \frac{z^2+2z+2}{z-2}$, γ je $|z| = 3$.

Řešení: Máme $f(z) = z^2 + 2z + 2$, f je holomorfní na $\mathbb{C}$. Dále bod $\xi = 2$, ξ leží uvnitř cesty γ (kružnice o středu 0 a poloměru 3).

Tedy

$$\int_{\gamma} g dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i \cdot 10 = 20\pi i.$$

- (b) $g(z) = \frac{\cos z}{z}$, γ je $|z| = 1$.

Řešení: Máme $f(z) = \cos z$, f je holomorfní na $\mathbb{C}$. Dále bod $\xi = 0$, ξ leží uvnitř cesty γ (kružnice o středu 0 a poloměru 1).

Tedy

$$\int_{\gamma} g dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \cos(0) = 2\pi i.$$

- (c) $g(z) = \frac{1}{z(z^2+4)}$, γ je $|z| = 1$.

Řešení: Uvažujme $\int_{\gamma} \frac{1}{z(z^2+4)} dz$.

Máme $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$, f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{2i, -2i\}$. Dále bod $\xi = 0$, ξ leží uvnitř cesty γ (kružnice o středu 0 a poloměru 1).

Tedy

$$\int_{\gamma} g dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{0^2+4} = \frac{\pi}{2} i$$

- (d) $g(z) = \frac{1}{z^2+1}$, γ je $|z-i| = 1$.

Řešení: Uvažujme $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz$.

Máme $f(z) = \frac{1}{z+i}$, f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Dále bod $\xi = i$, ξ leží uvnitř cesty γ (kružnice o středu i a poloměru 1).

Tedy

$$\int_{\gamma} g \, dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{1}{i+i} = \pi$$

- (e) $g(z) = \frac{e^z}{z-1}$, γ je $|z-1| = 1$.

Řešení: Máme $f(z) = e^z$, f je holomorfní na $\mathbb{C}$. Dále bod $\xi = 1$, ξ leží uvnitř cesty γ (kružnice o středu 1 a poloměru 1).

Tedy

$$\int_{\gamma} g \, dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i e^1 = 2\pi i e.$$

- (f) $g(z) = \frac{\cos z}{z-i}$, γ je $|z+1+i| = 2$.

Řešení: Máme $f(z) = \cos z$, f je holomorfní na $\mathbb{C}$. Dále bod $\xi = i$, ξ leží vně cesty γ (kružnice o středu $-1-i$ a poloměru 2).

Tedy

$$\int_{\gamma} g \, dz = 0.$$

4. Integrály bez návodu

- (a) $f(z) = |z|^2$, γ je oblouk křivky $y = 1/x$, $x \in [1, 2]$.

Řešení: Integrand není holomorfní, tedy počítáme integrál z definice. Křivka $\gamma(t) = t + i\frac{1}{t}$, $\gamma'(t) = 1 - \frac{i}{t^2}$

Integrál:

$$\int_1^2 \left(t^2 + i^2 \frac{1}{t^2} \right) \left(1 - \frac{i}{t^2} \right) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{1}{t} - i \left(t - \frac{1}{3t^3} \right) \right]_1^2 = \frac{17}{6} - i \frac{31}{24}$$

- (b) $f(z) = \frac{1}{z \cos z}$, γ je $|z| = 1$

Řešení: Uvažujme $\int_{\gamma} \frac{1}{z \cos z} dz$.

Máme $f(z) = \frac{1}{\cos z}$, f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$. Všechny problematické body ale leží mimo γ - kružnice o středu 0 a poloměru 1.

Dále bod $\xi = 0$, ξ leží uvnitř cesty γ .

Tedy z Cauchyova vzorce

$$\int_{\gamma} g \, dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{\cos 0} = 2\pi i$$

- (c) $f(z) = \frac{z}{z+2i}$, γ je trojúhelník spojující body 0, $2i$ a $3+i$.

Řešení: Máme $f(z) = z$, f je holomorfní na $\mathbb{C}$. Dále bod $\xi = -2i$, ξ leží vně cesty γ .

Tedy

$$\int_{\gamma} g \, dz = 0.$$

- (d) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, γ je $|z| = 3$.

Řešení: Uvažujme $\int_{\gamma} \frac{\frac{i}{2}}{z+i} dz - \int_{\gamma} \frac{\frac{i}{2}}{z-i} dz$.

První integrál: Máme $f(z) = \frac{1}{2}i$, f je holomorfní na $\mathbb{C}$. Dále bod $\xi = -i$, ξ leží uvnitř cesty γ (kružnice o středu 0 a poloměru 3).

Tedy

$$\int_{\gamma} \frac{\frac{i}{2}}{z+i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi \frac{i}{2} = \pi i.$$

Analogicky pro druhý integrál máme $f(z) = \frac{1}{2}i$ f je holomorfní na $\mathbb{C}$. Dále bod $\xi = i$, ξ leží uvnitř cesty γ (kružnice o středu 0 a poloměru 3).

$$\int_{\gamma} \frac{-\frac{i}{2}}{z-i} dz = 2\pi i f(i) = -2\pi \frac{i}{2} = \pi i.$$

Dohromady

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = 0$$

- (e) $f(z) = \operatorname{Re} z$, γ je $|z| = r$, $r > 0$.

Řešení: Přímým výpočtem.

Parametrizace křivky: $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pak $\gamma'(t) = rie^{it}$.

Integrál:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\cos t) rie^{it} dt &= \int_0^{2\pi} (\cos t) r(\cos t + i \sin t) dt = r \int_0^{2\pi} \cos^2 t + i \cos t \sin t dt \\ &= r \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + i \frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{2\pi} = r\pi \end{aligned}$$

- (f) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+1)^2}$, γ je $|z-1-2i| = 2$.

Řešení: Uvažujme $\int_{\gamma} \frac{\frac{1}{(z+i)(z+1)^2}}{z-i} dz$.

Máme $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z+1)^2}$, f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-i, -1\}$. Všechny problematické body ale leží mimo γ - kružnice o středu $1+2i$ a poloměru 2.

Dále bod $\xi = i$, ξ leží uvnitř cesty γ .

Tedy z Cauchyova vzorce

$$\int_{\gamma} g dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{1}{(i+i)(i+1)^2} = \frac{\pi}{2i}$$

- (g) $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)^3}$, γ je $|z+1+i| = 1$.

Řešení: Funkce f je spojitá a holomorfní na celém $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$, speciálně tedy na množině $M = |z+1+i| < 1.001$.

Křivka γ je uzavřená cesta. Tedy z Cauchyovy věty je

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

5. Necht' γ je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná křivka. Spočtete integrál $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+9} dz$, jestliže

- (a) bod $3i$ je uvnitř a bod $-3i$ vně křivky γ

Řešení: Bod $3i$ je uvnitř křivky, bod $-3i$ je vně. Uvažujeme tedy funkci $f = \frac{1}{z+3i}$

a

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-3i} dz = 2\pi i f(3i) = 2\pi i \frac{1}{3i+3i} = \frac{\pi}{3}$$

(b) bod $-3i$ je uvnitř a bod $3i$ vně křivky γ

Řešení: Bod $-3i$ je uvnitř křivky, bod $3i$ je vně. Uvažujeme tedy funkci $f = \frac{1}{z-3i}$
a

$$\int_{\gamma} \frac{\frac{1}{z-3i}}{z+3i} dz = 2\pi i f(-3i) = 2\pi i \frac{1}{-3i-3i} = -\frac{\pi}{3}$$

(c) oba body jsou vně γ

Řešení: Z Cauchyovy věty je

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

(d) oba body jsou uvnitř γ

Řešení: Rozložíme na parciální zlomky a pak oba integrály spočítáme z Cauchyova vzorce.

$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{\frac{1}{6i}}{z-3i} + \frac{\frac{-1}{6i}}{z+3i}.$$

Pak

$$\int_{\gamma} \frac{\frac{1}{6i}}{z-3i} + \frac{\frac{-1}{6i}}{z+3i} dz = \frac{1}{6} 2\pi i - \frac{1}{6} 2\pi i = 0.$$

6. Spočtěte integrál $\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$, kde γ je kružnice $|z-z_0|=r$, $r>0$.

Řešení: Lze přímo spočítat. Parametrizace $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, tedy $\gamma'(t) = rie^{it}$.

Pak pro $n \neq -1$ je

$$\int_0^{2\pi} (re^{it})^n rie^{it} dt = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{t(n+1)} dt = r^{n+1} i \left[\frac{e^{t(n+1)}}{n+1} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Pro $n = -1$ je

$$\int_0^{2\pi} (re^{it})^{-1} rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Poznámka: pro $n \in \mathbb{N}$ lze rovnou použít Cauchyovu větu.