



3. cvičení – Křivkový integrál

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Necht γ je cesta a necht f je spojitá funkce na γ^* . Definujeme *integrál funkce f podél cesty γ* jako

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Věta 2 (Vlastnosti integrálu). Necht f a g jsou komplexní funkce definované na příslušných křivkách. Následující platí, má-li pravá strana smysl:

- $\int_{\gamma} \alpha f(z) + \beta g(z) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$
- $\int -\gamma f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$

Věta 3 (O existenci primitivní funkce). Necht f je spojitá na Ω . Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. f má na Ω PF;
2. $\int_{\gamma} f = 0$ pro každou uzavřenou křivku γ v Ω ;
3. $\int_{\gamma} f$ nezávisí v Ω na křivce γ , tzn. $\int_{\gamma} f = \int_{\varphi} f$ pro každé dvě křivky $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ a $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$ takové, že $\gamma(\alpha) = \varphi(a)$ a $\gamma(\beta) = \varphi(b)$.

Věta 4 (Cauchyova věta pro konvexní množinu). Necht $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je konvexní otevřená, $p \in \Omega$, f je spojitá na Ω a $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. Pak $f = F'$ pro nějakou $F \in \mathcal{H}(\Omega)$. Speciálně tedy $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ pro každou uzavřenou cestu γ v Ω .

Věta 5 (Cauchyův vzorec pro konvexní množinu). Necht Ω je konvexní otevřená podmnožina $\mathbb{C}$, γ je uzavřená cesta v Ω a $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Je-li $\xi \in \Omega$ a $\xi \notin \gamma^*$, pak

$$f(\xi) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \xi} dz.$$

Příklady

Není-li řečeno jinak, jsou uzavřené křivky orientovány kladně. Křivka mezi body a a b začíná v bodě a a končí v bodě b .

1. Spočítejte integrál $\int_{\gamma} f(z) dz$
 - (a) $\ast f(z) = \text{Im } z$, γ je úsečka z bodu 0 do bodu $1 + i$
 - (b) $\odot f(z) = \text{Re } z$, γ je oblouk paraboly z bodu 0 do bodu $1 + i$, s parametrickou rovnicí $z(t) = t + it^2$, $t \in [0, 1]$.
 - (c) $f(z) = |z|^2$, γ je oblouk křivky $y = x^2$, z počátku do bodu $1 + i$.
 - (d) $\odot f(z) = \frac{1}{z-i}$, γ je $|z - i| = \frac{1}{2}$.

- (e) $f(z) = \operatorname{Re} z$, γ je lomená čára spojující body 0, 1 a $1 + i$.
2. Cauchyho Věta - Spočtěte integrál $\int_{\gamma} f(z) dz$
- (a) $f(z) = z^2$, γ je $|z - 3 + 5i| = \frac{1}{2}$.
- (b) $f(z) = \sin iz$, γ je libovolná křivka spojující body 0 a πi .
- (c) $f(z) = e^z$, γ je obvod obdélníka s vrcholy -1 , 1 , $1 + i$, $-1 + i$.
- (d) $\star f(z) = \frac{e^z}{z-i}$, γ je $|z + i| = 1$.
3. Cauchyův vzorec - Spočtěte integrál $\int_{\gamma} g(z) dz$
- (a) $g(z) = \frac{z^2+2z+2}{z-2}$, γ je $|z| = 3$.
- (b) $g(z) = \frac{\cos z}{z}$, γ je $|z| = 1$.
- (c) $\otimes g(z) = \frac{1}{z(z^2+4)}$, γ je $|z| = 1$.
- (d) $g(z) = \frac{1}{z^2+1}$, γ je $|z - i| = 1$.
- (e) $g(z) = \frac{e^z}{z-1}$, γ je $|z - 1| = 1$.
- (f) $g(z) = \frac{\cos z}{z-i}$, γ je $|z + 1 + i| = 2$.
4. Integrály bez návodu
- (a) $\star f(z) = |z|^2$, γ je oblouk křivky $y = 1/x$, $x \in [1, 2]$.
- (b) $\star f(z) = \frac{1}{z \cos z}$, γ je $|z| = 1$.
- (c) $f(z) = \frac{z}{z+2i}$, γ je trojúhelník spojující body 0, $2i$ a $3 + i$.
- (d) $\otimes f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, γ je $|z| = 3$.
- (e) $\heartsuit f(z) = \operatorname{Re} z$, γ je $|z| = r$, $r > 0$.
- (f) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+1)^2}$, γ je $|z - 1 - 2i| = 2$.
- (g) $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)^3}$, γ je $|z + 1 + i| = 1$.
5. Nechť γ je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná křivka. Spočtěte integrál $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+9} dz$, jestliže
- (a) bod $3i$ je uvnitř a bod $-3i$ vně křivky γ
- (b) bod $-3i$ je uvnitř a bod $3i$ vně křivky γ
- (c) oba body jsou vně γ
- (d) oba body jsou uvnitř γ
6. Spočtěte integrál $\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$, kde γ je kružnice $|z - z_0| = r$, $r > 0$.

(1a) Parametrizace $t + it$.	(3c) Uvažujte $\frac{1}{z^2+4}$.
(1b) Parametrizace $t + it^2$.	(4a) Pozor, není holomorfní.
(1d) Parametrizace $i + \frac{1}{2}e^{it}$.	(4b) Cauchyův vzorec.
(2d) Funkce je holomorfní na nějaké otevřené množině	(4d) Parciální zlomky.
obsahující γ - a to pro Cauchyovu větu stačí.	(4e) $\int \cos^2 t -$ řešte pomocí per partes.