



2. cvičení – Derivace komplexní funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Zdroje příkladů:

<https://homel.vsb.cz/~has081/soubory/KomplexM.pdf>

<https://www.umat.fekt.vut.cz/~svobodaz/JMA2/bma2sb.pdf>

1. Z definice vypočítejte derivaci v bodě z_0 funkce

(a) z^2

Řešení: Z definice

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0.$$

(b) $\frac{1}{z}$ Z definice

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{z_0 - z}{zz_0}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{-1}{zz_0} = -\frac{1}{z_0^2}$$

(c) $\frac{1}{z^2}$ Z definice

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z_0^2}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{z_0^2 - z^2}{z^2 z_0^2}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} -\frac{z_0 + z}{z^2 z_0^2} = -\frac{2}{z_0^3}$$

2. Za pomoci Cauchy-Riemannových podmínek rozhodněte, pro která $z \in \mathbb{C}$ existuje derivace funkce

(a) $|z|^2$

Řešení: Funkci lze zapsat jako $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + 0i$, tedy $f_1 = x^2 + y^2$, $f_2 = 0$. Dále

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 2x & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 2y \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \neq \frac{\partial f_2}{\partial y},$$

funkce nesplňuje Cauchy-Riemannovy podmínky a tedy derivace neexistuje pro žádné $z \in \mathbb{C}$.

(b) $\bar{z}$

Řešení: Funkci lze zapsat jako $f(z) = \bar{z} = x - iy$, tedy $f_1 = x$, $f_2 = -y$. Dále

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 1 & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= -1 \end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \neq \frac{\partial f_2}{\partial y},$$

funkce nespĺňuje Cauchy-Riemannovy podmínky a tedy derivace neexistuje pro žádné $z \in \mathbb{C}$.

(c) z^3

Řešení: Funkci lze zapsat jako $f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3$, tedy $f_1 = x^3 - 3xy^2$, $f_2 = 3x^2y - y^3$. Dále

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -6xy \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 6xy & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 3x^2 - 3y^2 \end{aligned}$$

Tedy funkce f_1 a f_2 mají spojitě obě parciální derivace a navíc

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Funkce tedy splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky a její derivace existuje pro $z \in \mathbb{C}$. Je tvaru

$$f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3(x + iy)^2 = 3z^2$$

(d) $\operatorname{Im} z$

Řešení: Funkci lze zapsat jako $f(z) = \operatorname{Im} z = y + 0i$, tedy $f_1 = y$, $f_2 = 0$. Dále

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} \neq -\frac{\partial f_2}{\partial x},$$

funkce nespĺňuje Cauchy-Riemannovy podmínky a tedy derivace neexistuje pro žádné $z \in \mathbb{C}$.

(e) $\frac{1}{z}$

Řešení: Zřejmě $z \neq 0$.

Funkci lze zapsat jako $f(z) = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$, tedy $f_1 = \frac{x}{x^2+y^2}$, $f_2 = \frac{-y}{x^2+y^2}$. Dále

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= -\frac{-y^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Tedy funkce f_1 a f_2 mají spojitě obě parciální derivace a navíc

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Funkce tedy splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky a její derivace existuje pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Je tvaru

$$f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{1}{z^2}$$

(f) $\cos z$

Řešení: Funkci lze zapsat jako $f(z) = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) = \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos(-x) + i \sin(-x)))$, tedy $f_1 = \frac{1}{2}(e^{-y} \cos x + e^y \cos(-x))$, $f_2 = \frac{1}{2}(e^{-y} \sin x + e^y \sin(-x))$.

Dále

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{1}{2}(e^{-y}(-\sin x) + e^y(\sin(-x))) & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{1}{2}(-e^{-y} \cos x + e^y \cos(-x)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x) - e^y(\cos(-x))) & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= \frac{1}{2}(-e^{-y}(\sin x) + e^y(\sin(-x))) \end{aligned}$$

Tedy funkce f_1 a f_2 mají spojitě obě parciální derivace a navíc

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Funkce tedy splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky a její derivace existuje pro $z \in \mathbb{C}$. Je tvaru

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{2}(e^{-y}(-\sin x) + e^y(\sin(-x))) + i \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x) - e^y(\cos(-x))) \\ &= \frac{e^y(\sin(-x)) - i \cos(-x)) + e^{-y}(-\sin x + i \cos x)}{2} \\ &= \frac{e^y(i \sin(-x)) + \cos(-x)) - e^{-y}(i \sin x + \cos x)}{2i} \\ &= -\sin z \end{aligned}$$

3. Dokažte, že následující funkce jsou harmonické na $\mathbb{R}^2$

(a) $x^2 - y^2$

Řešení: Funkce f je polynom, tedy má spojitě parciální derivace všech řádů na $\mathbb{R}^2$.

Dále

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

Tedy funkce je harmonická.

(b) $x(x^2 - 3y^2)$

Řešení: Funkce f je polynom, tedy má spojitě parciální derivace všech řádů na $\mathbb{R}^2$.

Dále

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6yx,$$

a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6x$$

Tedy funkce je harmonická.

(c) $\cos x(e^y - e^{-y})$

Řešení: Funkce f je součin a součet C^∞ funkcí, tedy má spojité parciální derivace všech řádů na $\mathbb{R}^2$.

Dále

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x(e^y - e^{-y}), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos x(e^y + e^{-y})$$

a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos x(e^y - e^{-y}) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \cos x(e^y - e^{-y})$$

Tedy funkce je harmonická.

4. Najděte funkci $f(z) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$, která má tyto vlastnosti:

- je holomorfní v definiční oblasti D ,
- její reálná (imaginární) část je daná harmonická funkce,
- splňuje danou podmínku $f(z_0) = w_0$.

(a) $f_1(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ $f(0) = 0$

Řešení: Z Cauchy-Riemannových podmínek potřebujeme, aby f_1 i f_2 měly spojité parciální derivace a aby

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Máme

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2$$

Tedy

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 3x^2 + 12xy - 3y^2$$

Odtud

$$f_2(x, y) = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + c(x),$$

kde $c(x)$ je funkce závisající jen na x .

Dále

$$-\frac{\partial f_1}{\partial y} = -(6x^2 - 6xy - 6y^2)$$

a

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 6xy + 6y^2 + c'(x)$$

Odtud

$$-6x^2 = c'(x)$$

a tedy

$$c'(x) = -2x^3 + K,$$

kde K je konstanta.

Dohromady

$$f(x + iy) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + i(3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3 + K).$$

Protože $f(0) = 0$, tak i $K = 0$ a

$$f(x + iy) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + i(3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3).$$

(b) $f_1(x, y) = e^{-x} \sin y + 2xy$, $f(0) = 0$

Řešení: Z Cauchy-Riemannových podmínek potřebujeme, aby f_1 i f_2 měly spojitě parciální derivace a aby

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Máme

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -e^{-x} \sin y + 2y$$

Tedy

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -e^{-x} \sin y + 2y$$

Odtud

$$f_2(x, y) = e^{-x} \cos y + y^2 + c(x)$$

kde $c(x)$ je funkce závisající jen na x .

Dále

$$-\frac{\partial f_1}{\partial y} = -(e^{-x} \cos y + 2x)$$

a

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -e^{-x} \cos y + c'(x)$$

Odtud

$$-2x = c'(x)$$

a tedy

$$c'(x) = -x^2 + K,$$

kde K je konstanta.

Dohromady

$$f(x + iy) = e^{-x} \sin y + 2xy + i(e^{-x} \cos y + y^2 - x^2 + K).$$

Protože $f(0) = 0$, tak $K = -1$ a

$$f(x + iy) = e^{-x} \sin y + 2xy + i(e^{-x} \cos y + y^2 - x^2 - 1).$$

(c) $f_1(x, y) = x^2 - 2xy$, $f(0) = 0$

Řešení: Z Cauchy-Riemannových podmínek potřebujeme, aby f_1 i f_2 měly spojitě parciální derivace a aby

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Máme

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x - 2y$$

Tedy

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x - 2y$$

Odtud

$$f_2(x, y) = 2xy - y^2 + c(x)$$

kde $c(x)$ je funkce závisající jen na x .

Dále

$$-\frac{\partial f_1}{\partial y} = -(-2x)$$

a

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2y + c'(x)$$

Tedy

$$2x = 2y + c'(x),$$

což je situace, která nemá řešení.

Takovou funkci tedy nelze nalézt. Je to proto, že zadaná f_1 není harmonická.

5. Necht' na oblasti D má holomorfní funkce pouze reálné hodnoty. Dokažte, že pak už je to konstantní funkce.

Řešení: Funkci lze psát ve tvaru $f(z) = f_1(x, y) + 0i$, tedy $f_2 = 0$. Pak z Cauchy-Riemannových podmínek platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0,$$

tedy $f_1 = c(x)$, kde $c(x)$ je konstanta závisající na x . Dále $c'(x) = 0$, tedy $c(x) = K$, kde K je konstanta.

Dohromady $f_1(x, y) = K$ a $f = K$, tedy je konstantní.

6. Necht' $f = u(x) + iv(y)$ je holomorfní na $\mathbb{C}$. Ukažte, že pak $f(z)$ je polynom stupně nejvýše 1.

Řešení: Z Cauchy-Riemannových podmínek platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= u'(x), & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= v'(y) \end{aligned}$$

tedy $u'(x) = v'(y)$. Pokud zderivujeme obě strany podle x , dostáváme

$$u''(x) = 0,$$

tedy $u'(x) = K$ a $u(x) = Kx + L$, kde K, L jsou konstanty. Analogicky $v(y) = My + N$, kde M, N jsou konstanty.