



2. cvičení – Derivace komplexní funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť f je komplexní funkce na Ω . Nechť $z_0 \in \Omega$. Pak *derivaci funkce f v bodě z_0* definujeme vztahem

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad (1)$$

pokud tato limita existuje.

Věta 2. Běžné vzorce pro derivaci součtu, součinu, podílu, složené funkce a inverzní funkce platí.

Věta 3. Má-li f **spojité parciální derivace** v okolí bodu w a jsou splněny **Cauchy-Riemannovy podmínky**

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(w) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(w), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(w) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(w),$$

má f bodě w derivaci tvaru $\frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x}$.

Věta 4. • Polynomy, exponenciální funkce, trigonometrické funkce jsou holomorfní na $\mathbb{C}$.

- Racionální funkce jsou holomorfní na svém definičním oboru.
- Větve funkcí logaritmus a odmocniny jsou holomorfní uvnitř svého definičního oboru.
- Reálná funkce na otevřené podmnožině roviny je holomorfní, právě když je konstantní.

Definice 5. Reálná funkce $f(x, y)$ dvou proměnných definovaná na otevřené množině G se nazývá *harmonická*, jestliže má na G **spojité parciální derivace 2. řádu** a v každém bodě G platí:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Poznámka 6. Nechť f je holomorfní na množině G , která má na G spojité 2. parciální derivace. Pak obě její složky jsou harmonické na G .

Příklady

1. Z definice vypočítejte derivaci v bodě z_0 funkce

(a) z^2

(b) $\frac{1}{z}$

(c) $\frac{1}{z^2}$

2. Za pomoci Cauchy-Riemannových podmínek rozhodněte, pro která $z \in \mathbb{C}$ existuje derivace funkce

(a) $|z|^2$

(c) z^3

(e) $\frac{1}{z}$

(b) $\bar{z}$

(d) $\operatorname{Im} z$

(f) $\cos z$

3. Dokažte, že následující funkce jsou harmonické na $\mathbb{R}^2$

(a) $x^2 - y^2$

(b) $x(x^2 - 3y^2)$

(c) $\cos x(e^y - e^{-y})$

4. Najděte funkci $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, která má tyto vlastnosti:

- je holomorfní v definiční oblasti D ,
- její reálná (imaginární) část je daná harmonickou funkcí,
- splňuje danou podmínku $f(z_0) = w_0$.

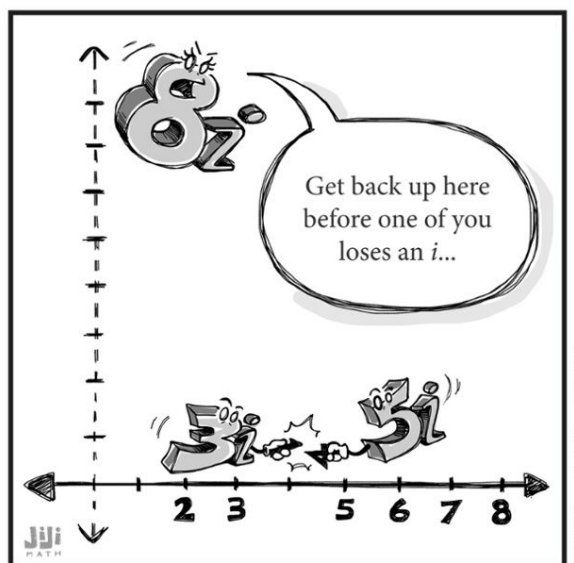
(a) $u(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, f(0) = 0$

(b) $u(x, y) = e^{-x} \sin y + 2xy, f(0) = 0$

(c) $u(x, y) = x^2 - 2xy, f(0) = 0$

5. Necht' na oblasti D má holomorfní funkce pouze reálné hodnoty. Dokažte, že pak už je to konstantní funkce.

6. Necht' $f = u(x) + iv(y)$ je holomorfní na $\mathbb{C}$. Ukažte, že pak $f(z)$ je polynom stupně nejvýše 1.



<https://www.pinterest.com/pin/off-the-number-line-imaginaries-at-play--552957660477012454/>

(4c) Vyjde, že situace nemá řešení. Porovnejte s Poznámkou 6.