



1. cvičení – Komplexní rovina, komplexní funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Příklady i s řešením máme z <https://homel.vsb.cz/~has081/soubory/KomplexM.pdf>
<https://www.umat.fekt.vut.cz/~svobodaz/JMA2/bma2sb.pdf>
realisticky.cz

1. Upravte

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad i^2 &= -1, \\ i^3 &= -i, \\ i^4 &= 1, \\ i^{125} &= i^{124} \cdot i = i, \\ i^{-3} &= \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{1} = i \\ i^{-4} &= \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1, \\ i^{-78} &= \frac{1}{i^{78}} = \frac{1}{i^{76} i^2} = \frac{1}{1 \cdot (-1)} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \frac{2+i}{i} + \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i-1}$$

Řešení: Máme

$$\frac{2+i}{i} = \frac{2+i}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{2i+i^2}{i^2} = \frac{2i-1}{-1} = 1-2i$$

$$\frac{i}{i+1} = \frac{i}{i+1} \cdot \frac{i-1}{i-1} = \frac{i^2-i}{i^2-1} = \frac{-1-i}{-2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

$$-\frac{2i+1}{i-1} = -\frac{2i+1}{i-1} \cdot \frac{i+1}{i+1} = -\frac{2i^2+2i+i+1}{i^2-1} = -\frac{-1+3i}{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

Dohromady

$$\frac{2+i}{i} + \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i-1} = 1-2i + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = 1$$

$$\text{(c)} \quad \frac{\overline{3+4i}}{1-2i}$$

Řešení:

$$\frac{\overline{3+4i}}{1-2i} = \frac{\overline{3+4i}}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{\overline{3+6i+4i+8i^2}}{1-4i^2} = \frac{\overline{1-5+10i}}{5} = \frac{1}{5}(-5+10i) = -1+2i$$

$$\text{(d)} \quad \frac{\overline{1+i}}{2-i}$$

Řešení:

$$\frac{\overline{1+i}}{2-i} = \frac{\overline{1+i}}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{1}{5}(1-3i)$$

2. Určete absolutní hodnotu

(a)

$$\left| \frac{4-2i}{3+i} \right| = \left| \frac{4-2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} \right| = \left| \frac{10-10i}{10} \right| = |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

(b)

$$\begin{aligned} \left| \frac{|4-3i|+i}{3-2i} \right| &= \left| \frac{\sqrt{16+9}+i}{3-2i} \right| = \left| \frac{5+i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} \right| = \left| \frac{13+13i}{13} \right| \\ &= |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

3. Převed'te na goniometrický tvar

(a)

$$3 = 3 \cdot (1 + 0i) = 3(\cos 0 + i \sin 0)$$

Alternativně lze určit přímo z obrázku.

(b)

$$10 - 10i = 10 \cdot \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = 10\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

(c)

$$\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

4. Převed'te na algebraický tvar

(a)

$$5(\cos 11\pi + i \sin 11\pi) = 5 \cos \pi + i \sin \pi = 5(-1 + i \cdot 0) = -5$$

(b)

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{105}{4}\pi + i \sin \frac{105}{4}\pi \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$$

Applet na grafické operace s komplexními čísly je tu:

[Sčítání a odčítání](#)

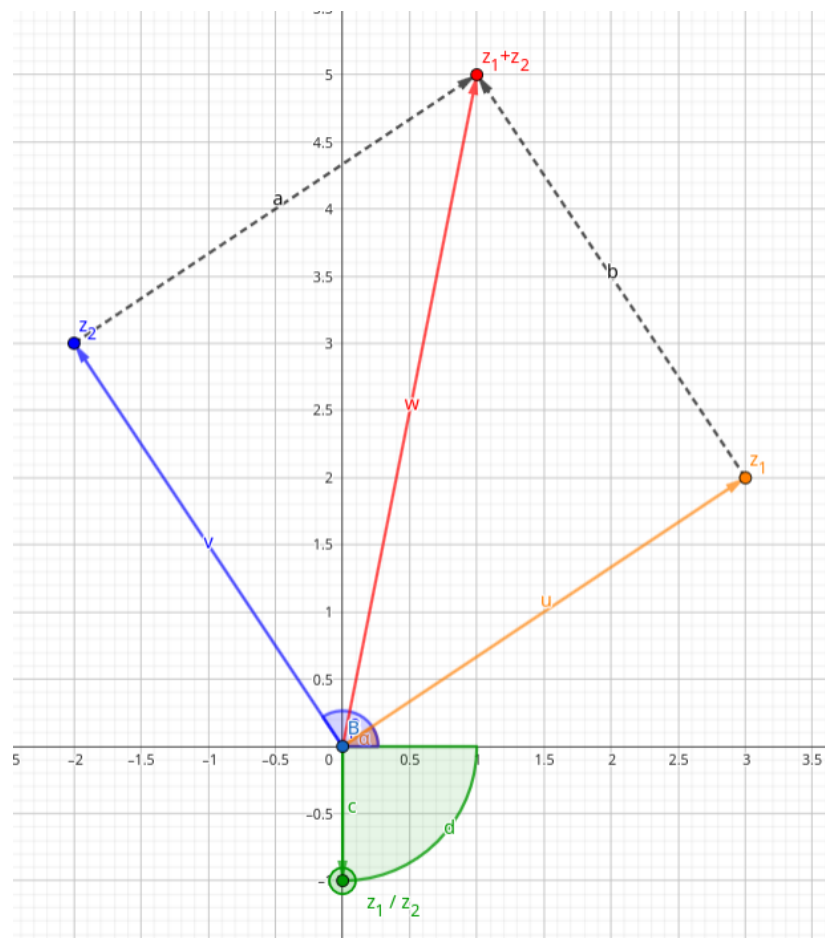
[Násobení a dělení](#)

5. Jsou dána čísla $z_1 = 3 + 2i$ a $z_2 = -2 + 3i$. Zakreslete je v Gaussově rovině a řešte graficky

(a) $z_1 + z_2$

(b) z_1/z_2

Řešení:



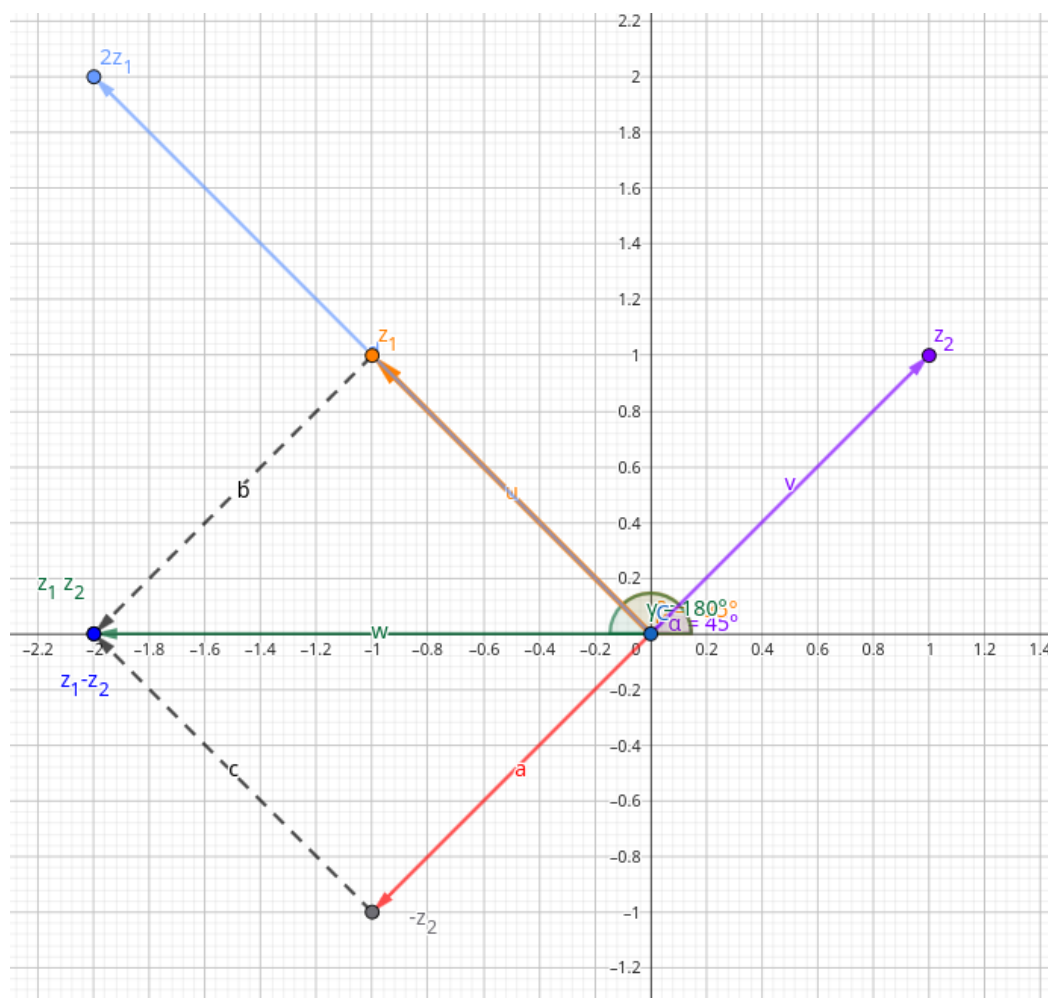
6. Jsou dána čísla $z_1 = -1 + i$ a $z_2 = 1 + i$. Zakreslete je v Gaussově rovině a řešte graficky

(a) $z_1 \cdot z_2$

(b) $z_1 - z_2$

(c) $2z_1$

Řešení:



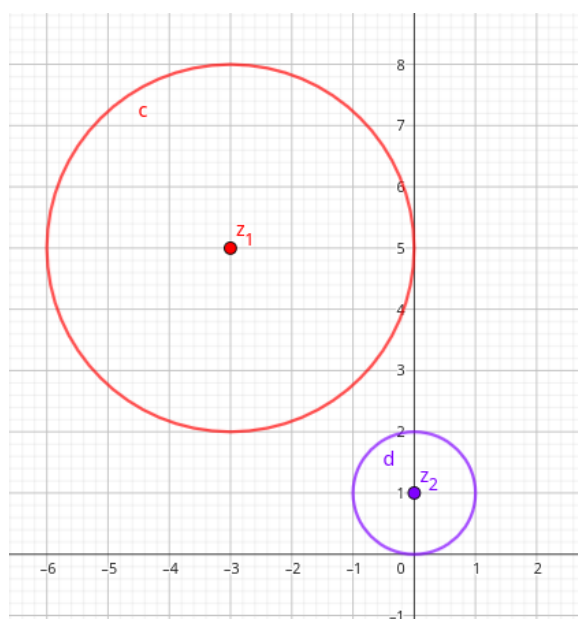
7. Zakreslete do komplexní roviny

(a) $|z - i| = 1$

Řešení: Píšeme jako $|z - (-i)| = 1$, což lze interpretovat jako taková z , jejichž vzdálenost od bodu $-i$ je rovna 1. Tedy kružnice o středu $-i$ a poloměru 1. Fialová kružnice na obrázku níže.

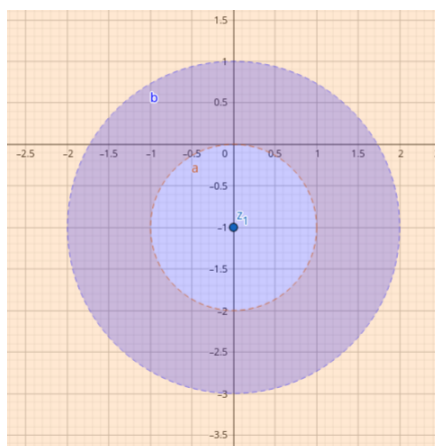
(b) $|z + 3 - 5i| = 3$

Řešení: Píšeme jako $|z - (-3 + 5i)| = 3$, což lze interpretovat jako taková z , jejichž vzdálenost od bodu $-3 + 5i$ je rovna 3. Tedy kružnice o středu $-3 + 5i$ a poloměru 3. Červená kružnice na obrázku.



(c) $1 < |z + i| < 2$

Řešení: Podobně jako předchozí příklady. Dostaneme mezikružší o středu $-i$ a poloměru 1 a 2.

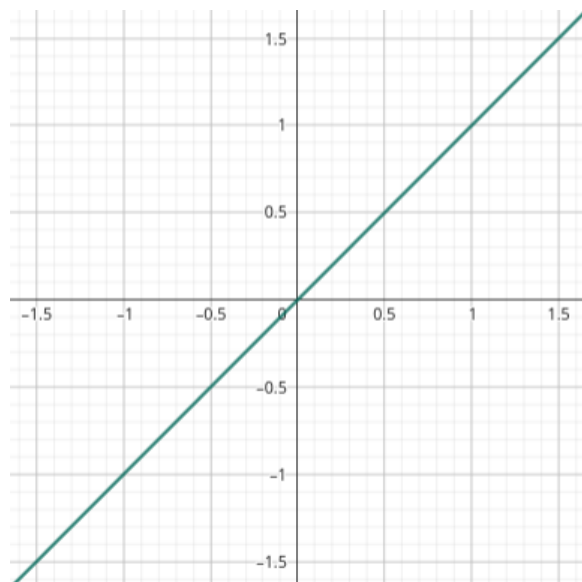


(d) $|z| = 1 - 2i$

Řešení: Absolutní hodnota musí být reálné číslo, tedy řešením je $\emptyset$.

(e) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$

Řešení: Taková komplexní čísla $z = a + bi$, pro něž $a = b$, tedy osa 1. a 3. kvadrantu.



(f) $\operatorname{Im} z = -i$

Řešení: Imaginární část komplexního čísla musí být reálné číslo, tedy řešením je $\emptyset$.

8. Vyjádřete hodnoty

(a) $(1 + i)^6$ Vyjádříme v goniometrickém tvaru, tedy

$$(1 + i) = \sqrt{1 + 1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Pak

$$(1 + i)^6 = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^6 = (\sqrt{2})^6 \left(\cos 3\frac{\pi}{2} + i \sin 3\frac{\pi}{2} \right) = 8(-i)$$

(b)

$$(5\sqrt{3} - 5i)^7$$

Řešení:

$$|(5\sqrt{3} - 5i)| = \sqrt{75 + 25} = 10$$

Pak

$$(5\sqrt{3} - 5i) = 10 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 10 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

Odtud

$$(5\sqrt{3} - 5i)^7 = 10^7 \left(\cos -\frac{7\pi}{6} + i \sin \left(-\frac{7\pi}{6} \right) \right) = 10^7 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$$

(c)

$$\sqrt[2]{4}$$

Řešení: Hlavní hodnota:

$$\sqrt[2]{4} = 4^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \log 4}.$$

Dále $|4| = 4$ a $4 = 4(\cos 0 + i \sin 0)$.

Platí

$$\log 4 = \log 4 + i0 = \log 4.$$

Tedy

$$\sqrt[2]{4} e^{\frac{1}{2} \log 4} = e^{\frac{1}{2}(\log 4)} = 2.$$

Další hodnoty: $4^{\frac{1}{2}} e^{2\frac{1}{2}k\pi}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Tedy

$$M_{\frac{1}{2}}(4) = \{2, -2\}$$

(d)

$$\sqrt[3]{-8}$$

Řešení:

$$\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \log(-8)}.$$

Dále $|(-8)| = 8$ a $(-8) = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Platí

$$\log(-8) = \log 8 + i\pi = i\pi$$

Tedy

$$\sqrt[3]{(-8)} = e^{\frac{1}{3} \log(-8)} = e^{\frac{1}{3}(\log 8 + i\pi)} = e^{\log 8^{\frac{1}{3}}} (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Další hodnoty: $(-8)^{\frac{1}{3}} e^{2\frac{1}{3}k\pi i}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Tedy uvažujeme navíc výrazy

$$e^{\frac{1}{3}(\log 8 + i\pi)} e^{\frac{2\pi i}{3}} = e^{\frac{1}{3} \log 8 + \pi i} = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$$

a

$$e^{\frac{1}{3}(\log 8 + i\pi)} e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{\frac{1}{3} \log 8 + \frac{5}{3}\pi i} = 2(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi) = 2(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$M_{\frac{1}{3}}(-8) = \{-2, 1 \pm \sqrt{3}i\}$$

(e)

$$e^{1+\pi i} = e^1(\cos \pi + i \sin \pi) = -e$$

(f)

$$e^{2+\frac{\pi}{2}i} = e^2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = e^2 i$$

(g) $\log(1+i)$

Máme $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Dále $1+i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

Tedy

$$\log(1+i) = \log(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}.$$

(h)

$$\ln(-1)$$

Máme $|-1| = 1$ a $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$. Tedy

$$\log(-1) = \log(1) + i\pi = i\pi.$$

(i)

$$(-1)^i = e^{i \log(-1)} = e^{i \cdot i\pi} = e^{-\pi}$$

(j)

$$i^i = e^{i \log i}$$

Dále $|i| = 1$, $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$. Tedy $\log i = \log 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$. Dohromady

$$i^i = e^{i \cdot i\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

(k)

$$\cos(\pi - i)$$

Řešení: Máme

$$e^{i(\pi-i)} = e^{1+i\pi} = e(\cos \pi + i \sin \pi) = -e$$

a

$$e^{-i(\pi-i)} = e^{-1-i\pi} = e^{-1}(\cos -\pi + i \sin -\pi) = -e^{-1}$$

Tedy

$$\cos(\pi - i) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{e} + (-e) \right)$$

(l)

$$\cos(1 + i \ln 2)$$

Řešení: Máme

$$e^{i(1+i \log 2)} = e^{-\log 2 + i} = e^{\log 2^{-1}} (\cos 1 + i \sin 1) = \frac{1}{2} (\cos 1 + i \sin 1)$$

a

$$e^{-i(1+i \log 2)} = e^{+\log 2 - i} = e^{\log 2} (\cos(-1) + i \sin(-1)) = 2(\cos 1 - i \sin 1)$$

Tedy

$$\cos(1 + i \ln 2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\cos 1 + i \sin 1) + 2(\cos 1 - i \sin 1) \right) = \frac{5}{4} \cos 1 - i \frac{3}{4} \sin 1$$

(m)

$$\sin(\pi + i)$$

Řešení: Máme

$$e^{i(\pi+i)} = e^{-1+i\pi} = e^{-1}(\cos \pi + i \sin \pi) = -\frac{1}{e}$$

a

$$e^{-i(\pi+i)} = e^{1-i\pi} = e^1(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = -e$$

Tedy

$$\sin(\pi + i) = \frac{1}{2i} \left(-\frac{1}{e} + e \right) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{e} - e \right)$$

9. Najděte reálnou a imaginární část funkce f , určete definiční obor.

(a)

$$f(z) = z + 1 - i$$

Řešení:

$$f(z) = a + bi + 1 - i = (a + 1) + i(b - 1),$$

tedy $\operatorname{Re} f(z) = (a + 1)$, $\operatorname{Im} f(z) = (b - 1)$.

Definiční obor: $D_f = \mathbb{C}$.

(b) $f(z) = \frac{i-1}{\sqrt{2}}z$

Řešení:

$$f(z) = \frac{i-1}{\sqrt{2}}(a + bi) = \frac{-a - b + i(a - b)}{\sqrt{2}}$$

tedy $\operatorname{Re} f(z) = \frac{-a-b}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{Im} f(z) = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$

Definiční obor: $D_f = \mathbb{C}$.

(c) $f(z) = e^{i\alpha}z$, $\alpha \in [0, 2\pi]$

Řešení:

$$f(z) = e^{i\alpha}(a + bi) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(a + bi) = a \cos \alpha - b \sin \alpha + i(a \sin \alpha + b \cos \alpha)$$

tedy $\operatorname{Re} f(z) = a \cos \alpha - b \sin \alpha$, $\operatorname{Im} f(z) = (a \sin \alpha + b \cos \alpha)$

Definiční obor: $D_f = \mathbb{C}$.

(d) $f(z) = \frac{z}{|z|}$

Řešení:

$$f(z) = \frac{a + bi}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

tedy $\operatorname{Re} f(z) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\operatorname{Im} f(z) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Definiční obor: $D_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(e) $f(z) = e^{-iz}$

Řešení:

$$f(z) = e^{-i(a+bi)} = e^{b-ai} = e^b(\cos(-a) + i \sin(-a))$$

tedy $\operatorname{Re} f(z) = e^b \cos a$, $\operatorname{Im} f(z) = -e^b \sin a$.

Definiční obor: $D_f = \mathbb{C}$.

10. Popište množiny

- (a) 2. kvadrant včetně hranice

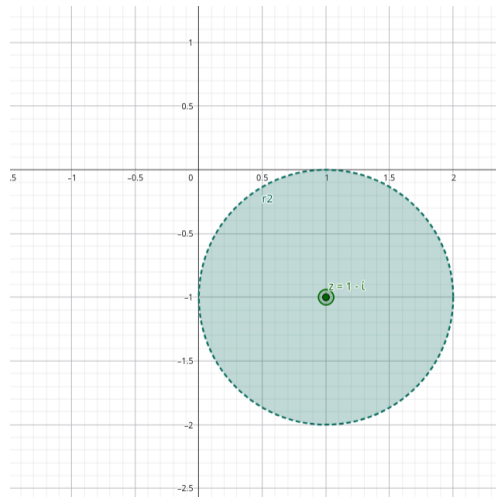
Řešení: Např.: $z \in \mathbb{C}$ takové, že $\operatorname{Im} z \geq 0$ a zároveň $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Nebo: $z \in \mathbb{C}$ takové, že $z = 0$ nebo $\arg z \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

- (b) Vnitřní oblast kružnice se středem v $1 - i$, která se dotýká reálné osy

Řešení: Zakreslíme bod do komplexní roviny a načrtneme nejprve kružnici. Vidíme, že hledáme kružnici se středem $1 - i$ a poloměrem 1. Tomu odpovídají body: $|z - (1 - i)| = 1$. Vnitřní oblast kružnice pak lze popsat jako

$$|z - 1 + i| < 1.$$



- (c) Množina kružnic, které se dotýkají imaginární osy v počátku

Jde o kružnice, které mají střed na reálné ose a poloměr roven vzdálenosti středu od počátku. Jde tedy o taková z , že

$$|z - r| = |r|,$$

kde $r \in \mathbb{R}$.

