



1. cvičení – Komplexní rovina, komplexní funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Prostor $\mathbb{C}$ je $\mathbb{R}^2$ s obvyklým sčítáním, násobením skalárem, eukleidovskou normou, v němž je navíc definované násobení

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac - bd, ad + bc].$$

(Neboli $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.)

Ztotožňujeme $[x, 0] = x$, tzn. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Značíme $i = [0, 1]$.

Poznámka 2. Pro $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ píšeme

1. $\operatorname{Re} z = a$, reálná část z .
2. $\operatorname{Im} z = b$, imaginární část z .
3. $\bar{z} = a - bi$, komplexně sdružené k z .
4. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, absolutní hodnota z .
5. goniometrický tvar komplexního čísla $z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.
6. Moivreova věta, $n \in \mathbb{N}$, $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = |z|^n e^{in\varphi}$
7. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
8. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$
9. $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
10. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Poznámka 3. Elementární funkce, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Necht $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1. polynomy se chovají jako v $\mathbb{R}$: $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$
2. exponenciální funkce $\exp z = e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$
3. goniometrické funkce $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
4. $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: argument komplexního čísla $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R}; z = |z|e^{i\varphi}\}$
5. $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: hlavní hodnota argumentu komplexního čísla $\arg z = \{\varphi \in (-\pi, \pi]; z = |z|e^{i\varphi}\}$
6. $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: hlavní hodnota logaritmu komplexního čísla $\log z = \ln |z| + i \arg z$
7. $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: logaritmus komplexního čísla $\operatorname{Log} z = \{\log z + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$
8. $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: hlavní hodnota α -té mocniny $z z^\alpha = e^{\alpha \log z}$
9. $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: α -tá mocnina $z M_\alpha(z) = \{e^{\alpha w}, w \in \operatorname{Log} z\}$

Příklady

Příklady i s řešením máme z <https://homel.vsb.cz/~has081/soubory/KomplexM.pdf>
<https://www.umat.fekt.vut.cz/~svobodaz/JMA2/bma2sb.pdf> realisticky.cz

1. Upravte

(a) $i^2, i^3, i^4, i^{125}, i^{-3}, i^{-4}, i^{-78}$

(c) $\overline{\left(\frac{3+4i}{1-2i}\right)}$

(b) $\frac{2+i}{i} + \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i-1}$

(d) $\frac{\overline{1+i}}{2-i}$

2. ☞ Určete absolutní hodnotu

(a) $\left|\frac{4-2i}{3+i}\right|$

(b) $\left|\frac{|4-3i|+i}{3-2i}\right|$

3. Převeďte na goniometrický tvar

(a) 3

(b) $10 - 10i$

(c) $\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ$

4. Převeďte na algebraický tvar

(a) $5(\cos 11\pi + i \sin 11\pi)$

(b) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{105}{4}\pi + i \sin \frac{105}{4}\pi \right)$

Applet na grafické operace s komplexními čísly je tu:

[Sčítání a odčítání](#)

[Násobení a dělení](#)

5. Jsou dána čísla $z_1 = 3 + 2i$ a $z_2 = -2 + 3i$. Zakreslete je v Gaussově rovině a řešte graficky

(a) $z_1 + z_2$

(b) z_1/z_2

6. Jsou dána čísla $z_1 = -1 + i$ a $z_2 = 1 + i$. Zakreslete je v Gaussově rovině a řešte graficky

(a) $z_1 \cdot z_2$

(b) $z_1 - z_2$

(c) $2z_1$

7. Zakreslete do komplexní roviny

(a) $|z - i| = 1$

(c) $1 < |z + i| < 2$

(e) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$

(b) $|z + 3 - 5i| = 3$

(d) $|z| = 1 - 2i$

(f) $\operatorname{Im} z = -i$

8. Vyjádřete hodnoty (je-li jich víc, tak všechny hodnoty)

(a) $(1 + i)^6$

(e) $e^{1+\pi i}$

(i) $(-1)^i$

(m) $\sin(\pi + i)$

(b) $(5\sqrt{3} - 5i)^7$

(f) $e^{2+\frac{\pi}{2}i}$

(j) i^i

(c) $\sqrt[2]{4}$

(g) $\ln(1 + i)$

(k) $\cos(\pi - i)$

(d) $\sqrt[3]{-8}$

(h) $\ln(-1)$

(l) $\cos(1 + i \ln 2)$

9. Najděte reálnou a imaginární část funkce f , určete definiční obor.

(a) $f(z) = z + 1 - i$

(d) $f(z) = \frac{z}{|z|}$

(b) $f(z) = \frac{i-1}{\sqrt{2}}z$

(e) $f(z) = e^{-iz}$

(c) $f(z) = e^{i\alpha}z, \alpha \in [0, 2\pi]$

10. Popište množiny

(a) 2. kvadrant včetně hranice

(b) Vnitřní oblast kružnice se středem v $1 - i$, která se dotýká reálné osy

(c) Množina kružnic, které se dotýkají imaginární osy v počátku



https://www.reddit.com/r/ExplainTheJoke/comments/1gv8xy4/i_cant_math/

- (2) Nejprve usměrňete.
 (3c) Nejprve vyčíslete a zkontrolujte, která složka je reálná a která imaginární.
 (7a) Ctené jako: Komplexní čísla, jejichž vzdálenost od čísla i je rovna 1.
 (7d) Jaké číslo je absolutní hodnota? Komplexní, celé, přirozené, reálné...
 (7f) Jaké číslo je imaginární část?
 (8a) Goniometrický tvar a Moivreova věta