# 12. cvičení – 3D integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Příklady

Zdroje příkladů a řešení:
http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf
https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=602492416
https://fix.prf.jcu.cz/~eisner/lock/UMB-566-materialy/matematika-sbirka-III-Krivkovy_integral.pdf
https://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/ip2.pdf
https://is.muni.cz/el/1433/jaro2009/MB102/7448541/skripta4.pdf
https://math.fel.cvut.cz/en/people/habala/teaching/veci-ma2/ma2r4.pdf
http://www.matematika-lucerna.cz/matalyza/resene-matika3.pdf

1. Spočtěte objem tělesa, kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 0 \le y \le 1; 0 \le x \le \arctan y; 0 \le z \le \dfrac{6x}{1+y^2}\}$

   **Řešení:** Počítáme objem, integrujeme tedy funkci $f(x,y,z) = 1$. Z Fubiniho věty pak máme

$$\int_0^1 \int_0^{\arctan y} \int_0^{\frac{6x}{1+y^2}} 1 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\arctan y} \frac{6x}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{3\arctan^2 y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$
$$= [\arctan^3 y]_0^1 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

2. Za pomoci substitucí spočtěte integrály

   (a) $\displaystyle\int_M x^2 + y^2 \,\mathrm{d}\lambda$ , kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 1 \le z \le 2; x^2+y^2 \le 1\}$

   **Řešení:** Válcové souřadnice.

$$\begin{aligned} x(r,\alpha,z) &:= r\,\cos\alpha \\ y(r,\alpha,z) &:= r\,\sin\alpha, \\ z(r,\alpha,z) &:= z \end{aligned}$$

   Navíc $z \in (1,2)$, $r \in (0,1)$, $\alpha \in (-\pi,\pi)$.
   Fubinka a věta o substituci.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^2 (r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha) r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}r &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^2 r^3 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} 1r^3 \,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}r = \int_0^1 2\pi r^3\,\mathrm{d}r \\ &= \left[\frac{2\pi r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

   (b) Spočtěte objem množiny $M$, kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; -1 < x < 1, z > 0, y^2+z^2 \le 1\}$

**Řešení:** Proházené válcové souřadnice.

$$
\begin{aligned}
x(r, \alpha, z) &:= x \\
y(r, \alpha, z) &:= r \cos \alpha \\
z(r, \alpha, z) &:= r \sin \alpha,
\end{aligned}
$$

Navíc $x \in (-1,1)$, $r \in (0,1)$, $\alpha \in (0,\pi)$.
Fubinka a věta o substituci.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^\pi \int_{-1}^1 r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}r = \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi 2r \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}r &= \int_0^1 2\pi r \, \mathrm{d}r \\
&= \left[\frac{2\pi r^2}{2}\right]_0^1 = \pi
\end{aligned}
$$

(c) $\displaystyle\int_M 1 \, \mathrm{d}\lambda$ , kde $M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

**Řešení:** Sférické souřadnice.

$$
\begin{aligned}
x(r, \beta, \gamma) &:= r \cos \gamma \, \cos \beta, \\
y(r, \beta, \gamma) &:= r \cos \gamma \, \sin \beta, \\
z(r, \beta, \gamma) &:= r \sin \gamma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 > r &> 0, \\
-\pi < \beta &< \pi, \\
-\frac{\pi}{2} < \gamma &< \frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

Fubinka a věta o substituci:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 r^2 \cos \gamma \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\beta \, \mathrm{d}\gamma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \gamma \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \mathrm{d}\beta \, \mathrm{d}\gamma &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cdot \cos \gamma \cdot 2\pi \, \mathrm{d}\gamma \\
&= \frac{2\pi}{3} [\sin \gamma]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}
$$

(d) $\displaystyle\int_M \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3} \, \mathrm{d}\lambda$ , kde $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

**Řešení:** Sférické souřadnice.

$$
\begin{aligned}
x(r, \beta, \gamma) &:= r \cos \gamma \, \cos \beta, \\
y(r, \beta, \gamma) &:= r \cos \gamma \, \sin \beta, \\
z(r, \beta, \gamma) &:= r \sin \gamma
\end{aligned}
$$

kde $r \in (1,2)$, $\beta \in (-\pi,\pi)$, $\gamma \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Fubinka a věta o substituci:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{1}^{2}\frac{1}{(r^2)^3}r^2\cos\gamma\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{1}^{2} r^{-4}\cos\gamma\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\gamma\left[\frac{r^{-3}}{-3}\right]_1^2\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{7}{24}\cos\gamma\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{7\cdot 2\pi}{24}\cos\gamma\,\mathrm{d}\gamma \\
&= \frac{7\pi}{12}[\sin\gamma]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{7\pi}{12}
\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\int_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\lambda$ , kde $M = \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3; x,y,z\geq 0; x^2+y^2+z^2\leq 1\}$

**Řešení:** Sférické souřadnice.

$$\begin{aligned}
x(r,\beta,\gamma) &:= r\,\cos\gamma\ \cos\beta, \\
y(r,\beta,\gamma) &:= r\,\cos\gamma\ \sin\beta, \\
z(r,\beta,\gamma) &:= r\,\sin\gamma
\end{aligned}$$

kde $r\in(0,1)$, $\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Fubinka a věta o substituci:

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1}\sqrt{r^2}r^2\cos\gamma\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1} r^3\cos\gamma\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\gamma\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos\gamma\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{8}\cos\gamma\,\mathrm{d}\gamma \\
&= \frac{\pi}{8}[\sin\gamma]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

(f) Spočtěte objem tělesa, $M = \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3; x^2+4y^2+z^2\leq 4\}$

**Řešení:** Zobecněné sférické souřadnice.

$$\begin{aligned}
x(r,\beta,\gamma) &:= r\,\cos\gamma\ \cos\beta, \\
y(r,\beta,\gamma) &:= \frac{1}{2}r\,\cos\gamma\ \sin\beta, \\
z(r,\beta,\gamma) &:= r\,\sin\gamma
\end{aligned}$$

kde $r\in(0,2)$, $\beta\in(-\pi,\pi)$, $\gamma\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Fubinka a věta o substituci (pozor na Jakobián):

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{2}\frac{1}{2}r^2\cos\gamma\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\gamma\left[\frac{r^3}{6}\right]_0^1\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{8}{6}\cos\gamma\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8\pi}{3}\cos\gamma\,\mathrm{d}\gamma = \frac{8\pi}{3}[\sin\gamma]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}\pi$$

(g) $\displaystyle\int_M z\,\mathrm{d}\lambda$ , kde $M = \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2\le z^2\le 1, z\ge 0\}$

**Řešení:** Jde o kužel. Válcové souřadnice.

$$\begin{aligned} x(r,\alpha,z) &:= r\,\cos\alpha\\ y(r,\alpha,z) &:= r\,\sin\alpha,\\ z(r,\alpha,z) &:= z \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnic dostáváme

$$r^2\le z^2\le 1$$

Tedy $z\in(0,1)$, $r\in(0,z)$, $\alpha\in(-\pi,\pi)$.
Fubinka a věta o substituci.

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^z zr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z = \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} z\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^z\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z = \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{z^3}{2}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z = \int_0^1\pi z^3\,\mathrm{d}z$$
$$= \pi\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

(h) $\displaystyle\int_M\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda$ , kde $M = \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2\le z\le 1\}$

**Řešení:** Parabolický kužel. Válcové souřadnice.

$$\begin{aligned} x(r,\alpha,z) &:= r\,\cos\alpha\\ y(r,\alpha,z) &:= r\,\sin\alpha,\\ z(r,\alpha,z) &:= z \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnic dostáváme

$$0\le r^2\le z\le 1$$

Tedy $z\in(0,1)$, $r\in(0,\sqrt{z})$, $\alpha\in(-\pi,\pi)$.
Fubinka a věta o substituci.

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{z}} r\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z = \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{z}}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z = \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{3}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 2\pi\frac{z^{\frac{3}{2}}}{3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{2z^{\frac{5}{2}}}{5}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{15}$$

(i) $\displaystyle\int_M z \mathrm{d}A$ , kde $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}\}$
**Řešení:** Otočený kužel. Válcové souřadnice.

$$\begin{aligned} x(r,\alpha,z) &:= r\,\cos\alpha \\ y(r,\alpha,z) &:= r\,\sin\alpha, \\ z(r,\alpha,z) &:= z \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnic dostáváme

$$0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{r^2} = 4 - 2r$$

Tedy $z \in (0, 4-2r)$, $r \in (0,2)$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$.
Fubinka a věta o substituci.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^2\int_0^{4-2r} r \cdot z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^2 r\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-2r} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^2 \frac{1}{2} r(4-2r)^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^2 2r^3 - 8r^2 + 8r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{r^4}{2} - \frac{8r^3}{3} + 4r^2\right]_0^2 \mathrm{d}\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{8}{3}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{16\pi}{3} \end{aligned}$$

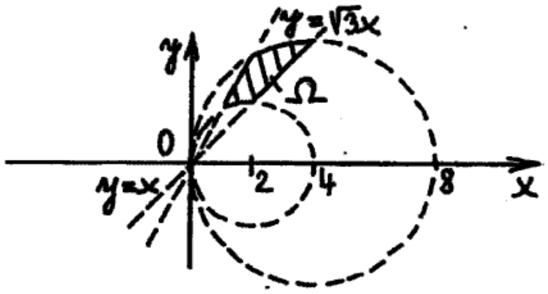
## Bonus

3. Muffin: Spočtěte objem tělesa $T$ určeného vztahy $x^2+y^2 \leq z^2$, $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.
4. Kornout se zmrzlinou: Spočtěte objem tělesa $T$ určeného vztahy $x^2+y^2 \leq z^2 \leq 6 - (x^2+y^2)$, $z \geq 0$.
5. Určete hmotnost krychle o straně $2a$. Hustota krychle je přímo úměrná čtverci vzdálenosti od průsečíku tělesových úhlopříček a ve vrcholech je rovna 1.
6. Určete hmotnost koule o poloměru $a$. Hustota koule je přímo úměrná vzdálenosti od středu koule a na povrchu je rovna 1.
7. $\displaystyle\int_M \frac{x+y}{z+4}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M$ je ohraničená plochami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=4$ a $x+y=3$.

# 13 Aplikace vícerozměrných integrálů

**121. Příklad** Spočtěte obsah rovinného obrazce $M$ ohraničeného přímkami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ a křivkami $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 8x$.

**Řešení** Nejprve provedeme úpravu rovnice $x^2 + y^2 = 4x$ na tvar $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Podobně $x^2 + y^2 = 8x$ upravíme na tvar $(x-4)^2 + y^2 = 16$. Odtud plyne, že zadané křivky jsou kružnice. Viz Obrázek 51.




Obrázek 51: $M$: $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$.

Obsah obrazce $M$ určíme ze vztahu $S(M) = \iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Protože $\Omega$ je částí kruhu, provedeme transformaci do polárních souřadnic. Transformováním jednotlivých rovnic získáme, že

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3},$$
$$4\cos\varphi \le \varrho \le 8\cos\varphi.$$

Platí

$$\iint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M^*} \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \Big(\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \varrho\,\mathrm{d}\varrho\Big)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} [\varrho^2]_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 12\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi + 3\sqrt{3} - 6.$$

3

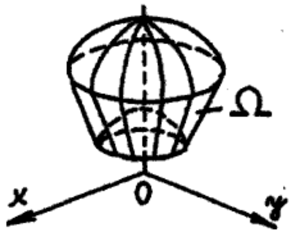
**122. Příklad** Spočtěte objem tělesa $\Omega$ určeného vztahy $x^2 + y^2 \le z^2, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je ohraničena kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a dvěma kulovými plochami. Viz Obrázek 52. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 1, 2\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle.$$

Objem tělesa $\Omega$ určíme ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

$$\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \int_1^2 \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$
$$= \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{3}\cdot 2\pi \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{3}\pi(2-\sqrt{2}).$$



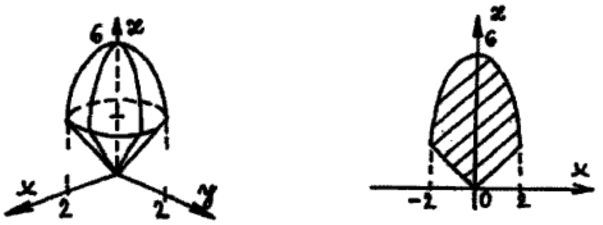

Obrázek 52: $\Omega : x^2 + y^2 \le z^2, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0$

(4) **123. Příklad** Spočtěte objem tělesa $\Omega$ určeného vztahem $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6 - (x^2+y^2)$.

**Řešení** Oblast $\Omega$ je ohraničena zhora paraboloidem $z = 6 - (x^2+y^2)$ a zdola kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Viz Obrázek 53. Musíme zjistit, v jaké výšce se paraboloid s kuželem protnou. Vyřešíme rovnici $\sqrt{x^2+y^2} = 6 - (x^2+y^2)$. Máme $x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2} - 6 = 0$. Zavedeme substituci $z = x^2+y^2$. Odtud $z^2 + z - 6 = 0$ a $(z-2)(z+3) = 0$. Řešení $z = -3$ nevyhovuje. Platí tedy $z = 2$. Ve výšce $z = 2$ protne paraboloid kužel v kružnicím $x^2+y^2 = 4$. Provedeme transformaci do válcových souřadnic. Z předchozího plyne, že

$$\varrho \in \langle 0, 2 \rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$
$$z \in \langle \varrho, 6 - \varrho^2 \rangle.$$

Objem tělesa $\Omega$ určíme opět ze vztahu $V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.




Obrázek 53: $\Omega : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6 - (x^2+y^2)$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho \, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_{\varrho}^{6-\varrho^2} \varrho \, \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\varphi\Big)\mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} [z\varrho]_{\varrho}^{6-\varrho^2} \mathrm{d}\varphi\Big)\mathrm{d}\varrho =$$

$$= 2\pi \int_0^2 (6\varrho - \varrho^2 - \varrho^3)\mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[3\varrho^2 - \frac{1}{3}\varrho^3 - \frac{1}{4}\varrho^4\right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{32}{3}\pi}}.$$

**124. Příklad** Spočtěte velikost povrchu části paraboloidu $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, kde $f(x,y) \ge 0$.

**Řešení** Velikost povrchu $S$ paraboloidu určíme ze vztahu $S = \iint_M \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M$ je kruh $x^2 + y^2 \le 1$. Spočteme parciální derivace. Platí $f'_x = -2x, f'_y = -2y$. Dosadíme do výše uvedeného vztahu a pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, kde

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle,$$

(5) **126. Příklad** Určete hmotnost krychle o straně $2a$. Hustota krychle je přímo úměrná čtverci vzdálenosti od průsečíku tělesových úhlopříček a ve vrcholech je rovna 1.

**Řešení** Střed krychle $\Omega$ umístíme do počátku systému souřadnic. Tedy $\Omega = \langle -a, a\rangle^3$. Dále nalezneme funkci hustoty $\varrho(x,y,z)$. Vzdálenost bodu $a = [x,y,z]$ od počátku je dán vztahem $d(a,o) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Odtud plyne $\varrho(x,y,z) = k(x^2+y^2+z^2)$. Konstantu přímé úměrnosti určíme dosazením souřadnic některého vrcholu. Platí $\varrho(a,a,a) = k(a^2+a^2+a^2)$. Tedy $k = \frac{1}{3a^2}$. Celkem $\varrho(x,y,z) = \frac{1}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)$. Vzhledem k symetrii tělesa i funkce lze integrovat pouze přes první oktant $\Omega_1$. Konečně hmotnost tělesa $\Omega$ určíme ze vztahu $m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \varrho(x,y,z)\, dxdydz$. Platí

$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)dxdydz = \frac{8}{3a^2}\iiint\limits_{\Omega_1} x^2+y^2+z^2\, dxdydz =$$

$$= \frac{8}{3a^2}\int_0^a \left(\int_0^a (\int_0^a x^2+y^2+z^2)dzdy\right)dx = \frac{8}{3a^2}\int_0^a \left(\int_0^a \left[x^2z+y^2z+\frac{1}{3}z^3\right]_0^a dy\right)dx =$$

$$= \frac{8}{3a}\int_0^a \left(\int_0^a (x^2+y^2+\frac{1}{3}a^2)dy\right)dx = \frac{8}{3}\int_0^a (x^2+\frac{2}{3}a^2)\,dx = \frac{8}{3}a^3.$$

(6) **127. Příklad** Určete hmotnost koule o poloměru $a$. Hustota koule je přímo úměrná vzdálenosti od středu koule a na povrchu je rovna 1.

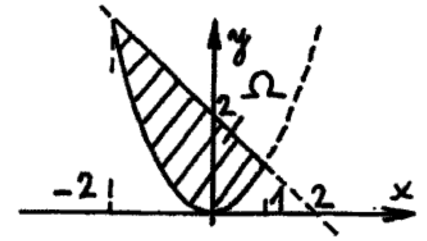
**Řešení** Střed koule $\Omega$ umístíme do počátku systému souřadnic. Nalezneme funkci hustoty $\varrho(x,y,z)$. Platí $\varrho(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Konstantu přímé úměrnosti určíme dosazením souřadnic některého bodu na povrchu koule. Například bodu $[a,0,0]$. Platí $\varrho(a,0,0) = ka$. Odtud $k = \frac{1}{a}$. Celkem $\varrho(x,y,z) = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Hmotnost tělesa $\Omega$ určíme opět ze vztahu $m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \varrho(x,y,z)\, dxdydz$. Je výhodné provést transformaci do sférických souřadnic. Platí

$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \frac{1}{a}\iiint\limits_{\Omega_*} \varrho^3 \sin\vartheta\, d\varrho d\varphi d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a \varrho^3 d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{4}\varrho\right]_0^a \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\pi} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{4}a^4\cdot 2\pi\cdot 2 = \pi a^3.$$

(7) **128. Příklad** Určete těžiště rovinného obrazce $M$, který je ohraničen křivkami $y = x^2, x + y = 2$. Hustota obrazce je konstantní a je rovna 1.

**Řešení** Těžiště $T$ rovinného obrazce $M$ určíme ze vztahu $T = \left[\frac{S_x(M)}{m(M)}, \frac{S_y(M)}{m(M)}\right]$. Obrazec zapíšeme jako oblast typu $(x,y)$. Řešením rovnice $x^2 = 2 - x$ dostáváme $(x-1)(x+2) = 0$ a odtud $x = -2, x = 1$. Platí tedy $-2 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le 2 - x$. Viz Obrázek 55.




Obrázek 55:

(7)

$$m(M)=\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$

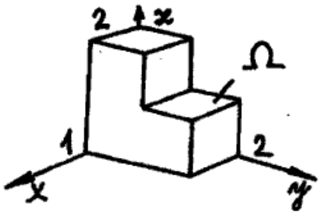
$$S_x(M)=\iint_M y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x}y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(2-x)^2-x^4\mathrm{d}x=\left[2x-x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{10}x^5\right]_{-2}^{1}=\frac{36}{5}.$$

$$S_y(M)=\iint_M x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}x(2-x-x^2)\mathrm{d}x=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{1}=-\frac{9}{4}.$$

Odtud plyne, že $T=\left[-\frac{1}{2},\frac{8}{5}\right]$.

(8) **129. Příklad** Určete těžiště tělesa $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ s konstantní hustotou, kde $\Omega_1=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\rangle$ a $\Omega_2=\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle\times\langle 0,1\rangle$.

**Řešení** Těžiště $T$ tělesa $\Omega$ určíme ze vztahu $T=\left[\frac{S_{yz}(\Omega)}{m(\Omega)},\frac{S_{xz}(\Omega)}{m(\Omega)},\frac{S_{xy}(\Omega)}{m(\Omega)}\right]$. Viz Obrázek 56. Je-li hustota $\varrho(x,y,z)=c$, pak zřejmě $m(\Omega)=3c$.




Obrázek 56:

$$S_{xy}(\Omega)=\iiint_{\Omega_1} cz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{\Omega_2} cz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=c\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^2 z\,\mathrm{d}z+c\int_0^1\mathrm{d}x\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^1 z\,\mathrm{d}z=\frac{5}{2}c.$$

$$S_{xz}(\Omega)=\iiint_{\Omega_1} cy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{\Omega_2} cy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=c\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_0^2\mathrm{d}z+c\int_0^1\mathrm{d}x\int_1^2 y\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z=\frac{5}{2}c.$$

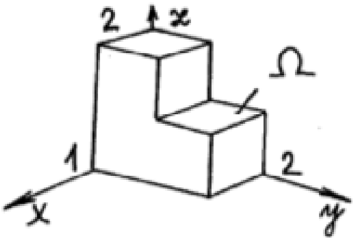
$$S_{yz}(\Omega)=\iiint_{\Omega_1} cx\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{\Omega_2} cx\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=c\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^2\mathrm{d}z+c\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z=\frac{3}{2}c.$$

Odtud plyne, že $T=\left[\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{5}{6}\right]$.

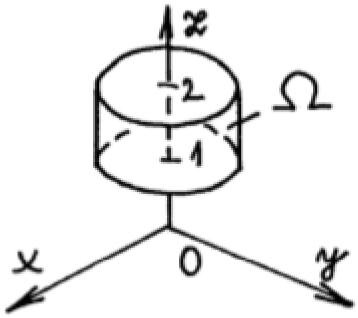
8. Přiřaďte rovnici obrázku.

   (a) 2 $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq z \leq 2; x^2+y^2 \leq 1\}$
   (b) 12 $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq z^2; 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4; z \geq 0\}$
   (c) 4 $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$
   (d) 6 Ohraničeno plochami $z=0$, $z=3$, $x^2+y^2-2x=0$ a navíc $y \geq 0$
   (e) 7 $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq 1; z \geq 0\}$
   (f) 5 $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4-2\sqrt{x^2+y^2}\}$
   (g) 9 $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \leq 0\}$
   (h) 10 $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+4y^2+z^2 \leq 4\}$
   (i) 11 $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq z\}$
   (j) 8 $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6-(x^2+y^2)\}$
   (k) 1 $M = M_1 \cup M_2$, kde $M_1 = [0,1] \times [0,1] \times [0,2]$ a $M_2 = [0,1] \times [1,2] \times [0,1]$
   (l) 3 $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; -1 \leq x \leq 1; z \geq 0; y^2+z^2 \leq 1\}$

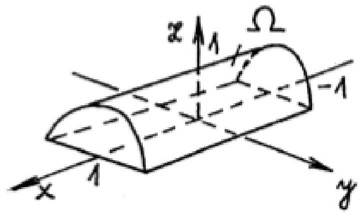
   Zdroj: https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=602492416



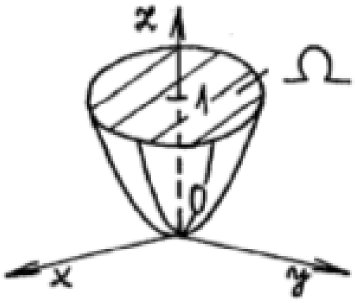

1k



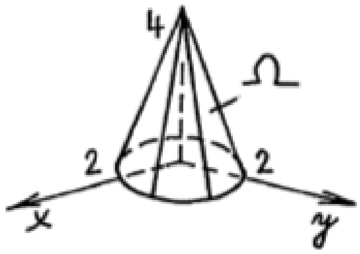

2a



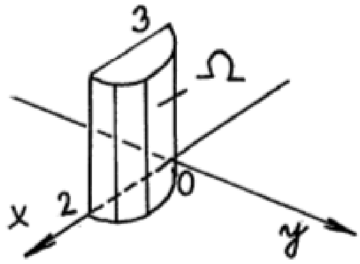

3l



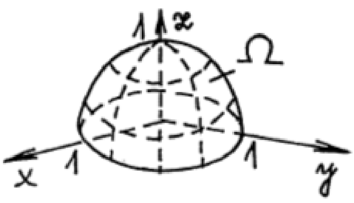

4c



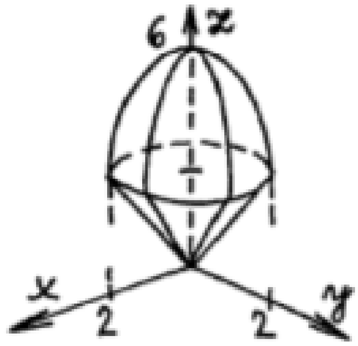

5f



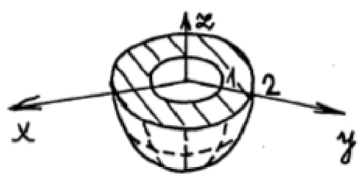

6d



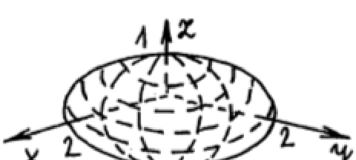

7e



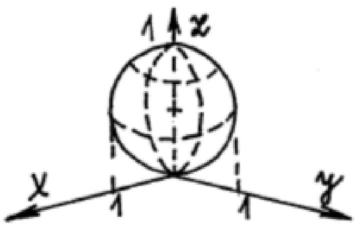

8j



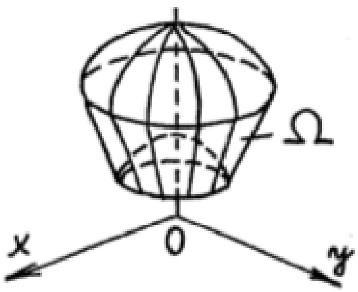

9g




10h




11i




12b