12. cvičení – 3D integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (o substituci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_M u(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Algoritmus

1. Nakreslíme množinu.
2. Aplikujeme válcové/sférické souřadnice a najdeme meze.
3. Nezapomeneme na Jakobián a spočteme.

Hint

$$\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin t\cos t \qquad \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t$$

Příklady

Zdroje příkladů a řešení:
http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf
https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=602492416
https://fix.prf.jcu.cz/~eisner/lock/UMB-566-materialy/matematika-sbirka-III-Krivkovy_integral.pdf
https://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/ip2.pdf
https://is.muni.cz/el/1433/jaro2009/MB102/7448541/skripta4.pdf
https://math.fel.cvut.cz/en/people/habala/teaching/veci-ma2/ma2r4.pdf
http://www.matematika-lucerna.cz/matalyza/resene-matika3.pdf

1. Spočtěte objem tělesa, kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 0 \le y \le 1; 0 \le x \le \arctan y; 0 \le z \le \frac{6x}{1+y^2}\}$
2. Za pomoci substitucí spočtěte integrály
   (a) $\int_M x^2 + y^2\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \le z \le 2; x^2 + y^2 \le 1\}$
   (b) Spočtěte objem množiny M, kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; -1 < x < 1, z > 0, y^2 + z^2 \le 1\}$
   (c) $\int_M 1\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$
   (d) $\int_M \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \le 0\}$

(e) $\displaystyle\int_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x,y,z \geq 0; x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

(f) Spočtěte objem tělesa, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+4y^2+z^2 \leq 4\}$

(g) $\displaystyle\int_M z\;\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq z^2 \leq 1, z \geq 0\}$

(h) $\displaystyle\int_M \sqrt{x^2+y^2}\;\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$

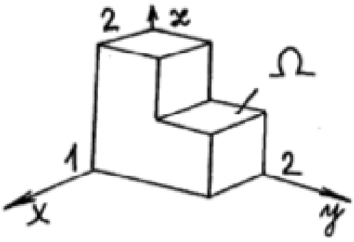
(i) $\displaystyle\int_M z\mathrm{d}A$, kde $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4-2\sqrt{x^2+y^2}\}$

Bonus

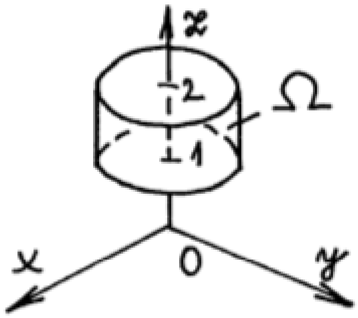
3. Muffin: Spočtěte objem tělesa T určeného vztahy $x^2+y^2 \leq z^2$, $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.
4. Kornout se zmrzlinou: Spočtěte objem tělesa T určeného vztahy $x^2+y^2 \leq z^2 \leq 6-(x^2+y^2)$, $z \geq 0$.
5. Určete hmotnost krychle o straně $2a$. Hustota krychle je přímo úměrná čtverci vzdálenosti od průsečíku tělesových úhlopříček a ve vrcholech je rovna 1.
6. Určete hmotnost koule o poloměru a. Hustota koule je přímo úměrná vzdálenosti od středu koule a na povrchu je rovna 1.

7. Přiřaďte rovnici obrázku.
   (a) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 1 \le z \le 2; x^2+y^2 \le 1\}$
   (b) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \le z^2; 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4; z \ge 0\}$
   (c) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \le z \le 1\}$
   (d) Ohraničeno plochami $z=0$, $z=3$, $x^2+y^2-2x=0$ a navíc $y \ge 0$
   (e) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \le 1; z \ge 0\}$
   (f) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 0 \le z \le 4-2\sqrt{x^2+y^2}\}$
   (g) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, z \le 0\}$
   (h) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+4y^2+z^2 \le 4\}$
   (i) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \le z\}$
   (j) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6-(x^2+y^2)\}$
   (k) $M = M_1 \cup M_2$, kde $M_1 = [0,1] \times [0,1] \times [0,2]$ a $M_2 = [0,1] \times [1,2] \times [0,1]$
   (l) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; -1 \le x \le 1; z \ge 0; y^2+z^2 \le 1\}$

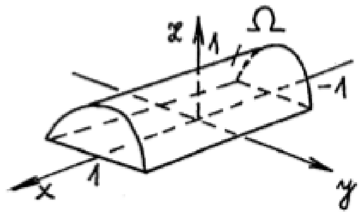
   Zdroj: https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=602492416



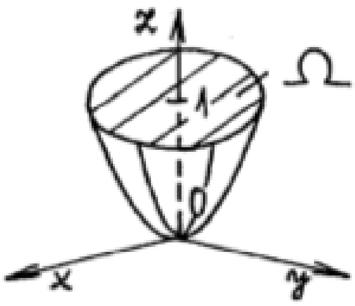
1



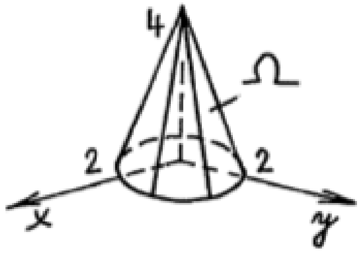
2



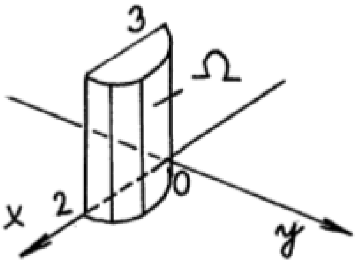
3



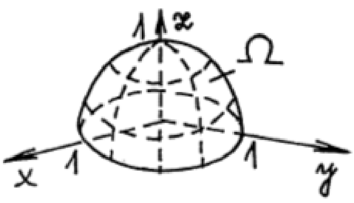
4



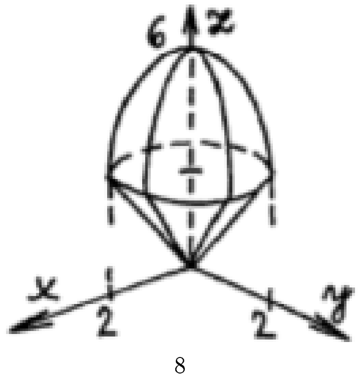
5



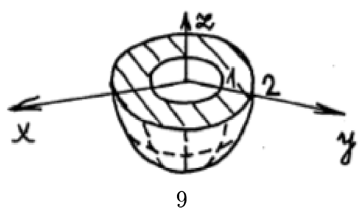
6



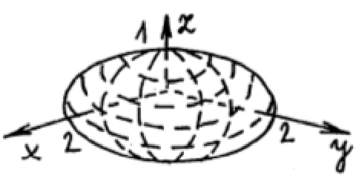
7



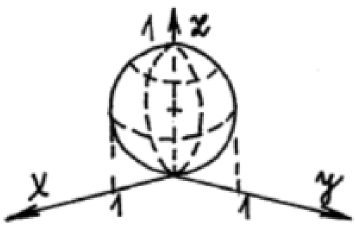
8



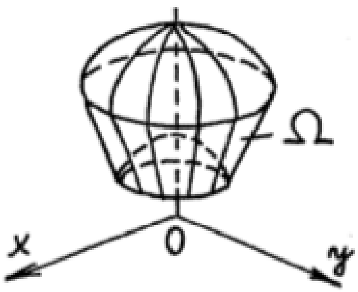
9



10



11



12