



11. cvičení – 2D integrál

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Zdroje příkladů a řešení:

http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf
https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=602492416
https://fix.prf.jcu.cz/~eisner/lock/UMB-566-materialy/matematika-sbirka-I-II-Krivkovy_integral.pdf
<https://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/ip2.pdf>
<https://is.muni.cz/el/1433/jaro2009/MB102/7448541/skripta4.pdf>
<https://math.fel.cvut.cz/en/people/habala/teaching/veci-ma2/ma2r4.pdf>
<http://www.matematika-lucerna.cz/matalyza/resene-matika3.pdf>

Dvojný integrál

1. Vypočítejte dvojný integrál přes množinu M

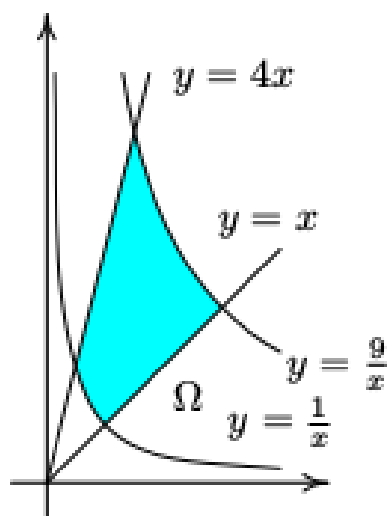
- (a) $\int_M x \sin y \, d\lambda$, kde $M = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$
- (b) $\int_M y \, d\lambda$, kde M je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0$ a $x + y - 4 = 0$.
- (c) $\int_M \frac{x}{y^2} \, d\lambda$, kde M je určena vztahy $1 \leq x \leq y \leq 3$.
- (d) $\int_M e^{x/y} \, d\lambda$, kde M je určena vztahy $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ a $y^2 = x$
- (e) $\int_M xy^2 \, d\lambda$ M je určena vztahy $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ a $x + y - 1 \geq 0$.
- (f) $\int_M 1 \, d\lambda$, kde M je určena vztahy $x + y = 4$, $x + y = 12$ a $y^2 = 2x$.

2. Změňte pořadí integrace

(a) $\int_2^3 \int_2^{8-2x} f(x, y) \, dy \, dx$ (b) $\int_0^1 \int_0^{e^y} f(x, y) \, dx \, dy$ (c) $\int_0^\infty \int_0^x f(x, y) \, dy \, dx$

3. Sestavte (nepočítejte) integrály z funkce $f(x, y) = \sin^2 x \cos xy^3$ přes množiny

- (a) $M = \{[x, y]; x \leq 2; 1 \leq y \leq e^x\}$
- (b) $M = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 2; -x \leq y \leq x^2\}$
- (c) $M = \{[x, y]; x^2 - 4x + 5 \leq y \leq 6x - 3 - x^2\}$
- (d) M na obrázku



Bonus

4. Spočtete integrál $\int_M x^y \, d\lambda$, kde $M = [0, 1] \times [1, 2]$. Zkuste zaměnit pořadí integrace.

PŘÍKLADY K MATEMATICE 3 - VÍCENÁSOBNÉ INTEGRÁLY

ZDENĚK ŠIBRAVA

1. VÍCENÁSOBNÉ INTEGRÁLY

1.1. Dvojné integrály.

Příklad 1.1. Vypočítejme dvojný integrál

$$\int_M \frac{x^2}{3+y^2} dA,$$

kde $M = \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení: Funkce $f(x, y) = \frac{x^2}{3+y^2}$ je na obdélníku (dvojměrném intervalu) M spojitá. Užitím Fubiniovy věty převedeme dvojný integrál na dvojnásobný integrál (přičemž nezáleží na pořadí, ve kterém budeme integrovat) a postupnou integrací dostaneme

$$\begin{aligned} \int_M \frac{x^2}{3+y^2} dA &= \int_0^3 \int_0^1 \frac{x^2}{3+y^2} dy dx = \int_0^3 \left[\frac{x^2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{3}} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{18} \int_0^3 x^2 dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 1.2. Vypočítejme dvojný integrál

$$\int_M x \sin y dA,$$

kde $M = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, \pi/2 \rangle$.

Řešení: Funkce $f(x, y) = x \sin y$ je na M spojitá. Pomocí Fubiniovy věty opět převedeme dvojný integrál na dvojnásobný. Protože meze pro x i y jsou konstantní, opět nezáleží v jakém pořadí budeme integrovat. Postupně dostaneme

Date:

(1a)

$$\begin{aligned} \int_M x \sin y \, dA &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 x \sin y \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} x^2 \sin y \right]_{x=1}^{x=2} dy = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin y \, dy = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Příklad 1.3. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M x^2 y \, dA,$$

kde $M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$.**Výsledek:** 4**Příklad 1.4.** Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M e^x y \, dA,$$

kde $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 4 \rangle$.**Výsledek:** $8(e-1)$ **Příklad 1.5.** Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \frac{1}{(1+x+2y)^3} \, dA,$$

kde $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 4 \rangle$.**Výsledek:** $\frac{11}{90}$ **Příklad 1.6.** Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M x^2 y e^{xy} \, dA,$$

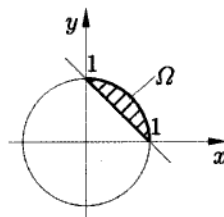
kde $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.**Výsledek:** 2**Příklad 1.7.** Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M xy^2 \sin(x^2 + y) \, dA,$$

kde $M = \langle 0, \sqrt{\pi} \rangle \times \langle 0, \pi/2 \rangle$.**Výsledek:** $\frac{1}{4}\pi^2 - 2$ **Příklad 1.8.** Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M xy \, dA,$$

kde M je množina ohraničená křivkami $y = -x$ a $y = x - x^2$.

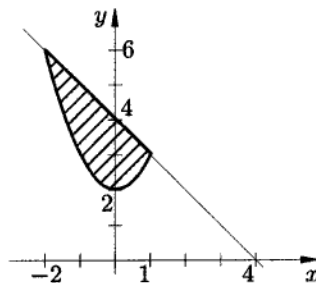
Obrázek 13: $\Omega : x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x + y - 1 \geq 0$

Zvolíme-li typ (y, x) , pak $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq y \leq 1, 1 - y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$. V tomto případě vede výpočet na jednodušší integrál.

$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^1 (y^3 - y^4) dy = \frac{1}{20}.$$

84. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} y dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 14. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y) . Krajní meze x -ové souřadnice oblasti získáme jako x -ové souřadnice průsečíků přímky a paraboly. Řešíme $x^2 + 2 = 4 - x$. Odtud $x^2 + x - 2 = 0$ a $x_1 = -2, x_2 = 1$. Platí $\Omega = \{[x, y]; -2 \leq x \leq 1, x^2 + 2 \leq y \leq 4 - x\}$.

Obrázek 14: $\Omega : x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$

$$\iint_{\Omega} y dx dy = \int_{-2}^1 \left(\int_{x^2+2}^{4-x} y dy \right) dx = \int_{-2}^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2+2}^{4-x} dx = \int_{-2}^1 \frac{1}{2} ((4-x)^2 - (x^2+2)^2) dx = \underline{\underline{\frac{81}{5}}}.$$

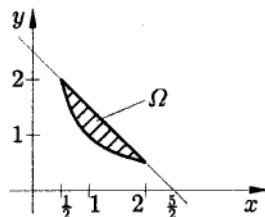
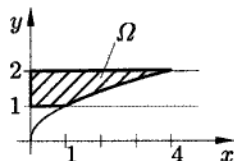
85. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} xy dx dy$, kde Ω je určena vztahy $xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a hyperbolou. Viz Obrázek 15. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y) . Krajní meze x -ové souřadnice oblasti získáme jako x -ové souřadnice průsečíků přímky a hyperboly. Řešíme $x(\frac{5}{2} - x) = 1$. Odtud $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$. Platí $\Omega = \{[x, y]; \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{5}{2} - x\}$.

$$\iint_{\Omega} xy dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy dy \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x \left(\frac{5}{2} - x \right)^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{165}{128} - \ln 2.$$

86. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} e^{\frac{x}{y}} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 16. Popišme obor Ω jako oblast typu (y, x) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y^2\}$.

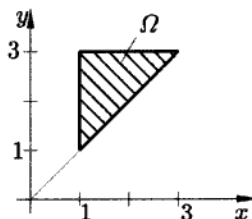
Obrázek 15: $\Omega : xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$ Obrázek 16: $\Omega : x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$

$$\iint_{\Omega} e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx \right) dy = \int_1^2 \left[ye^{\frac{x}{y}} \right]_0^{y^2} dy = \int_1^2 (ye^y - y) dy = \left[ye^y - e^y - \frac{1}{2}y^2 \right]_1^2 = e^2 - \frac{3}{2}.$$

(1c)

87. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} \frac{x}{y^2} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $1 \leq x \leq y \leq 3$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen třemi přímkami. Viz Obrázek 17. Popišme obor Ω jako oblast obou typů. Pro typ (x, y) platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 3\}$ a pro typ (y, x) platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq y \leq 3, 1 \leq x \leq y\}$. Výpočet provedeme pro oba typy.

Obrázek 17: $\Omega : 1 \leq x \leq y \leq 3$

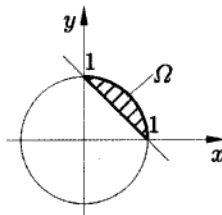
$$\iint_{\Omega} \frac{x}{y^2} dx dy = \int_1^3 \left(\int_x^3 \frac{x}{y^2} dy \right) dx = \int_1^3 \left[-\frac{x}{y} \right]_x^3 dx = \int_1^3 \left(1 - \frac{x}{3} \right) dx = \left[x - \frac{x^2}{6} \right]_1^3 = \frac{2}{3}.$$

$$\iint_{\Omega} \frac{x}{y^2} dx dy = \int_1^3 \left(\int_1^y \frac{x}{y^2} dx \right) dy = \int_1^3 \left[\frac{x^2}{2y^2} \right]_1^y dy = \frac{1}{2} \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{y^2} \right) dy = \frac{1}{2} \left[y + \frac{1}{y} \right]_1^3 = \frac{2}{3}.$$

88. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x = 2, y = x, xy = 1$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a hyperbolou. Viz Obrázek 18. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$.

$$\iint_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = \frac{9}{4}.$$

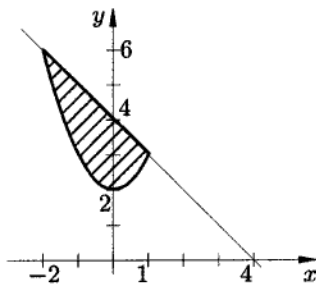
Obrázek 13: $\Omega : x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x + y - 1 \geq 0$

Zvolíme-li typ (y, x) , pak $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq y \leq 1, 1 - y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$. V tomto případě vede výpočet na jednodušší integrál.

$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^1 (y^3 - y^4) dy = \frac{1}{20}.$$

84. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} y dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 14. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y) . Krajní meze x -ové souřadnice oblasti získáme jako x -ové souřadnice průsečíků přímky a paraboly. Řešíme $x^2 + 2 = 4 - x$. Odtud $x^2 + x - 2 = 0$ a $x_1 = -2, x_2 = 1$. Platí $\Omega = \{[x, y]; -2 \leq x \leq 1, x^2 + 2 \leq y \leq 4 - x\}$.

Obrázek 14: $\Omega : x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$

$$\iint_{\Omega} y dx dy = \int_{-2}^1 \left(\int_{x^2+2}^{4-x} y dy \right) dx = \int_{-2}^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2+2}^{4-x} dx = \int_{-2}^1 \frac{1}{2} ((4-x)^2 - (x^2+2)^2) dx = \frac{81}{5}.$$

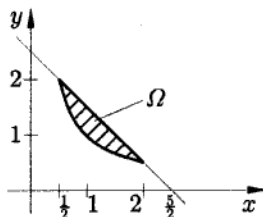
85. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} xy dx dy$, kde Ω je určena vztahy $xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a hyperbolou. Viz Obrázek 15. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y) . Krajní meze x -ové souřadnice oblasti získáme jako x -ové souřadnice průsečíků přímky a hyperboly. Řešíme $x(\frac{5}{2} - x) = 1$. Odtud $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$. Platí $\Omega = \{[x, y]; \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{5}{2} - x\}$.

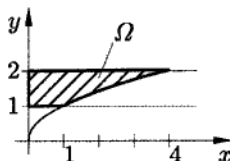
$$\iint_{\Omega} xy dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy dy \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x \left(\frac{5}{2} - x \right)^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{165}{128} - \ln 2.$$

86. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} e^{\frac{x}{y}} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 16. Popišme obor Ω jako oblast typu (y, x) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y^2\}$.

Obrázek 15: $\Omega : xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$

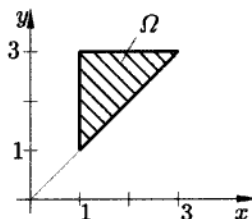
(1d)

Obrázek 16: $\Omega : x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$

$$\iint_{\Omega} e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx \right) dy = \int_1^2 \left[ye^{\frac{x}{y}} \right]_0^{y^2} dy = \int_1^2 (ye^y - y) dy = \left[ye^y - e^y - \frac{1}{2}y^2 \right]_1^2 = e^2 - \frac{3}{2}.$$

87. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} \frac{x}{y^2} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $1 \leq x \leq y \leq 3$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen třemi přímkami. Viz Obrázek 17. Popišme obor Ω jako oblast obou typů. Pro typ (x, y) platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 3\}$ a pro typ (y, x) platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq y \leq 3, 1 \leq x \leq y\}$. Výpočet provedeme pro oba typy.

Obrázek 17: $\Omega : 1 \leq x \leq y \leq 3$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{x}{y^2} dx dy &= \int_1^3 \left(\int_x^3 \frac{x}{y^2} dy \right) dx = \int_1^3 \left[-\frac{x}{y} \right]_x^3 dx = \int_1^3 \left(1 - \frac{x}{3} \right) dx = \left[x - \frac{x^2}{6} \right]_1^3 = \frac{2}{3}. \\ \iint_{\Omega} \frac{x}{y^2} dx dy &= \int_1^3 \left(\int_1^y \frac{x}{y^2} dx \right) dy = \int_1^3 \left[\frac{x^2}{2y^2} \right]_1^y dy = \frac{1}{2} \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{y^2} \right) dy = \frac{1}{2} \left[y + \frac{1}{y} \right]_1^3 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

88. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x = 2, y = x, xy = 1$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a hyperbolou. Viz Obrázek 18. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$.

$$\iint_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = \frac{9}{4}.$$

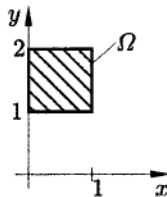
Část II

Integrační počet funkcí více proměnných

9 Dvojný integrál - Fubiniho věta

81. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} x^y dx dy$, kde $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$.

Řešení Integrační obor Ω je čtverec, tj. dvojrozměrný interval $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$. Viz Obrázek 11. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (y, x) .

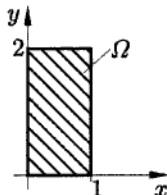
Obrázek 11: $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$

$$\iint_{\Omega} x^y dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy = \int_1^2 \frac{1}{y+1} dy = \left[\ln |y+1| \right]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}.$$

V případě, že oblast Ω budeme chápat jako oblast typu (x, y) , narazíme při výpočtu na integrál $\int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x} dx$, který nelze vyřešit v množině elementárních funkcí.

82. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} x^2 y e^{xy} dx dy$, kde $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.

Řešení Integrační obor Ω je obdélník $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$. Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (x, y) .

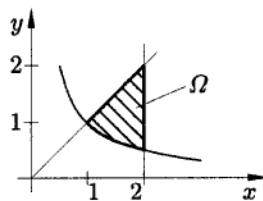
Obrázek 12: $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x^2 y e^{xy} dx dy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 x^2 y e^{xy} dx \right) dy = \int_0^2 \left(\left[x y e^{xy} \right]_0^1 - \int_0^1 e^{xy} dy \right) dy = \\ &= \int_0^2 \left[(xy - 1)e^{xy} \right]_0^2 dy = \int_0^2 (2x - 1)e^{2x} + 1 dx = \int_0^2 2xe^{2x} dx + \int_0^2 e^{2x} dx + \int_0^2 1 dx = \left[xe^{2x} - e^{2x} - x \right]_0^2 = 2. \end{aligned}$$

83. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x + y - 1 \geq 0$.

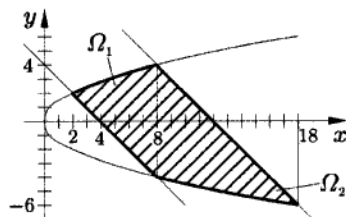
Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a kružnicí. Viz Obrázek 13. Oblast Ω je typu (x, y) i (y, x) . Zvolme typ (x, y) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.

$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x}{3} \left(\sqrt{(1-x^2)^3} - (1-x)^3 \right) dx = \frac{1}{20}.$$

Obrázek 18: $\Omega : x = 2, y = x, xy = 1$

89. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$.

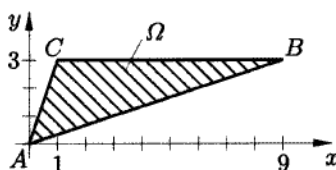
Řešení Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a parabolou. Viz Obrázek 19. Je zřejmé, že obor Ω je nutné rozdělit na dvě části Ω_1 a Ω_2 tak, že $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Oblasti Ω_1, Ω_2 popíšeme jako oblasti typu (x, y) . Platí $\Omega_1 = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 8, 4 - x \leq y \leq \sqrt{2x}\}$ a $\Omega_2 = \{[x, y]; 8 \leq x \leq 18, -\sqrt{2x} \leq y \leq 12 - x\}$.

Obrázek 19: $\Omega : x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} dx dy &= \iint_{\Omega_1} dx dy + \iint_{\Omega_2} dx dy = \int_2^8 \left(\int_{4-x}^{\sqrt{2x}} dy \right) dx + \int_8^{18} \left(\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} dy \right) dx = \int_2^8 (\sqrt{2x} + x - 4) dx + \int_8^{18} (\sqrt{2x} - \\ &- x + 12) dx = \frac{74}{3} + \frac{122}{3} = \underline{\underline{62}}. \end{aligned}$$

90. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} \sin y^2 dx dy$, kde Ω je určena body $A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkami. Viz Obrázek 20. Obor Ω popíšeme jako oblast typu (y, x) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq y \leq 3, \frac{1}{3}y \leq x \leq 3y\}$. Volba typu (x, y) vede k rozdělení oblasti na dvě části a navíc k integrálu $\int \sin y^2 dy$. Tento integrál nelze vyřešit nad množinou elementárních funkcí.

Obrázek 20: $\Omega : A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \cos y^2 dx dy &= \int_0^3 \left(\int_{\frac{y}{3}}^{3y} \cos y^2 dx \right) dy = \int_0^3 [x \cos y^2]_{\frac{y}{3}}^{3y} dy = \frac{4}{3} \int_0^3 2y \cos y^2 dy = \left| \begin{array}{l} t = y^2 \\ 0 \rightarrow 0, 3 \rightarrow 9 \end{array} \right| = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^9 \cos t dt = \frac{4}{3} [\sin t]_0^9 = \frac{4}{3} \sin 9. \end{aligned}$$

Teď integrujeme danou funkci.

$$\iint_{\Omega} 2e^{x/y} dA = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} 2e^{x/y} dy dx.$$

Máme drobný problém, integrál $\int e^{x/y} dy$ je dost drsný, jeden z těch, které nejdou vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Naštěstí máme alternativu, zkusíme vodorovné řezy a doufáme, že vyjdou lepší integrály. Pro dané y se hodnoty x na odpovídajícím řezu mění mezi $x = y^2$ a $x = y$ (pěkné vzorce, možná jsme tak měli dělat i ten obsah). Dostáváme

$$\iint_{\Omega} 2e^{x/y} dA = \int_0^1 \int_{y^2}^y 2e^{x/y} dx dy.$$

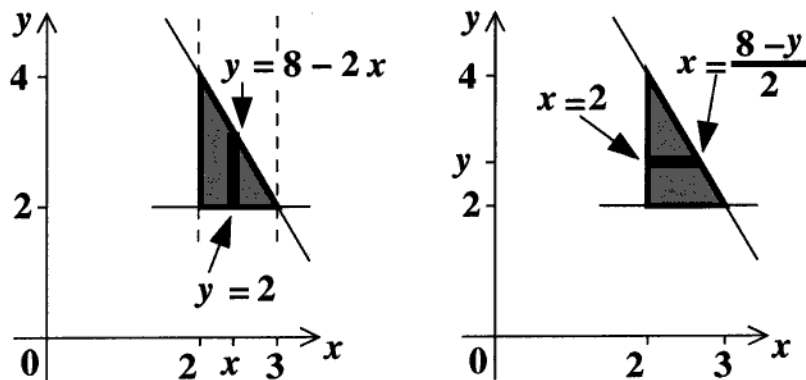
Toto je mnohem snazší, potřebujeme najít $\int e^{x/a} dx$, což je standardní integrál, který se nejlépe dělá substitucí. Nakonec také budeme potřebovat integraci per partes.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} 2e^{x/y} dA &= \int_0^1 \int_{y^2}^y 2e^{x/y} dx dy = \left| \begin{array}{l} w = \frac{x}{y} \\ dw = \frac{1}{y} dx \\ dx = y dw \\ x = y \mapsto w = 1 \\ x = y^2 \mapsto w = y \end{array} \right| = \int_0^1 \int_y^1 2e^w y dw dy \\ &= \int_0^1 \left[2y e^w \right]_{w=y}^{w=1} dy = \int_0^1 2e y - 2y e^y dy = e \int_0^1 2y dy - \int_0^1 2y e^y dy \\ &= e \left[y^2 \right]_0^1 - \left[2y e^y \right]_0^1 + \int_0^1 2e^y dy = e - 2e + \left[2e^y \right]_0^1 = e - 2. \end{aligned}$$

Průměr je tedy

$$\frac{1}{A(\Omega)} \iint_{\Omega} 2e^{x/y} dA = 6e - 12.$$

6. Nejprve potřebujeme zjistit, přes jakou oblast Ω integrujeme. Vnitřní proměnnou je y , která nás pohybuje nahoru a dolů, takže jdeme po svislých řezech. Pozice těchto řezů jsou dány hodnotami x , takže ten nejvíce vlevo je na přímce $x = 2$ a ten nejvíce vpravo na přímce $x = 3$. Z limit vnitřního integrálu vidíme, že pro dané x jde odpovídající svislý řez od křivky $y = 2$ po křivku $y = 8 - 2x$, takže Ω je oblast mezi těmito dvěma křivkami. Nakreslíme obrázek.

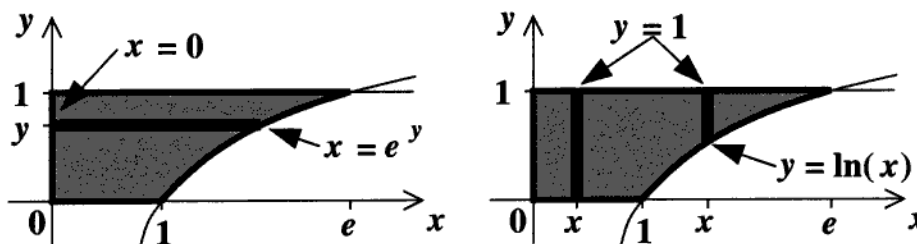


Změna pořadí integrace znamená přepnout na ten druhý směr řezů (viz obrázek vpravo). Vodor-

ovné řezy jsou dány volbou nějakého y mezi 2 a 4 (to bude vnější integrál), pro takové y se proměnná x pohybuje mezi $x = 2$ a $x = \frac{1}{2}(8 - y)$ (to dostaneme vyřešením vztahu $y = 8 - 2x$ pro x). Dostáváme integrál

$$\int_2^4 \int_2^{(8-y)/2} f(x, y) dx dy.$$

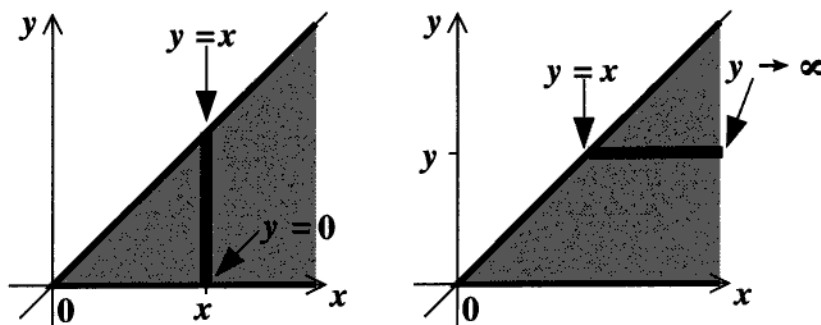
(2b) 7. Začneme určením oblasti integrace Ω . Vnitřní proměnná je x udávající pohyb doprava a doleva, což znamená, že jdeme po vodorovných řezech, nejnižší je na přímce $y = 0$ a nejvyšší u $y = 1$. Řezy sahají od křivky $x = 0$ po křivku $x = e^y$, což je $y = \ln(x)$. Teď jsme připraveni to nakreslit.



Pro změnu pořadí integrace přejdeme na svislé řezy, ale obrázek jasně ukazuje, že pak máme dva typy řezů, jinými slovy, dostaneme dva integrály: Pro x mezi 0 a 1 jdou svislé řezy od $y = 0$ po $y = 1$, pro x mezi 1 a e jdou svislé řezy od $y = \ln(x)$ po $y = 1$. Dostáváme

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx + \int_1^e \int_{\ln(x)}^1 f(x, y) dy dx.$$

(2c) 8. Nejprve určíme oblast integrace Ω . Vnitřní integrál s pracovní proměnnou y ukazuje na svislé řezy, každý řez se rozkládá mezi křivkami $y = 0$ a $y = x$. Řezy bereme pro všechna $x \geq 0$, obrázek je teď jasný.



Změna pořadí integrace odpovídá přechodu k těm druhým řezům, tedy k vodorovným (viz obrázek napravo). Abychom pokryli celou Ω , musíme uvažovat vodorovné řezy až do nekonečna, jejich pozice jsou tedy dány pomocí y z množiny $\langle 0, \infty \rangle$. Pro zvolené y pak odpovídající řez nechává x probíhat mezi křivkou $x = y$ a nekonečnem. A už je tu integrál.

$$\int_0^\infty \int_y^\infty f(x, y) dx dy.$$

9. Protože je daná oblast obdélník,

8. Dvojný a trojný integrál

Při výpočtech vícenásobných integrálů budeme užívat zejména Fubiniovu větu (viz [1], [2], [3], [7]).

Příklad 8.1:

Vypočítejte dvojný integrál

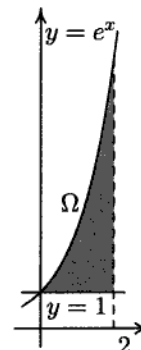
$$\iint_{\Omega} \left(x + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dx dy,$$

kde oblast $\Omega = \{[x, y]; x \leq 2, 1 \leq y \leq e^x\}$.

řešení:

Nakreslíme si oblast Ω a uijíme Fubiniovu větu.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(x + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dx dy &= \int_0^2 \left(\int_1^{e^x} \left(x + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy \right) dx = \\ &= \left[xy + 2\sqrt{y} \right]_{y=1}^{y=e^x} = xe^x + 2\sqrt{e^x} - x - 2 \\ &= \int_0^2 (xe^x + 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2) dx = \left[(x-1)e^x + 4e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_0^2 = e^2 + 4e - 9. \end{aligned}$$



Příklad 8.2:

Vypočítejte dvojný integrál

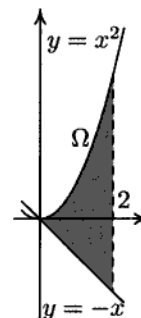
$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy,$$

kde oblast $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x^2\}$.

řešení:

Nakreslíme si oblast Ω a uijíme Fubiniovu větu.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} xy^2 dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{-x}^{x^2} xy^2 dy \right) dx = \\ &= \left[x \cdot \frac{y^3}{3} \right]_{y=-x}^{y=x^2} = \frac{1}{3}(x^7 + x^4) \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 (x^7 + x^4) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^8}{8} + \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{64}{5} = 12,8. \end{aligned}$$



Poznamenejme, že Fubiniovu větu by bylo možné použít i v opačném pořadí integrace (příčemž oblast Ω rozdělíme na dvě části)

$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{y}}^2 xy^2 dx \right) dy + \int_{-2}^0 \left(\int_{-y}^0 xy^2 dx \right) dy.$$

Příklad 8.3:

Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{x} dx dy,$$

kde oblast $\Omega = \{[x, y]; x^2 - 4x + 5 \leq y \leq 6x - 3 - x^2\}$.

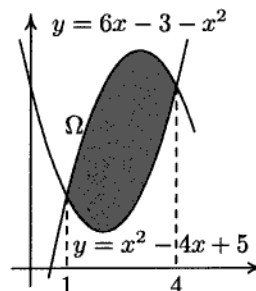
řešení:

Nakreslíme si oblast Ω . Potřebujeme zjistit průsečíky funkcí $y = x^2 - 4x + 5$ a $y = 6x - 3 - x^2$, což vede na rovnici

$$x^2 - 4x + 5 = 6x - 3 - x^2 \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \text{s kořeny } 1 \text{ a } 4.$$

K výpočtu použijeme opět Fubiniovu větu

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{1}{x} dx dy &= \int_1^4 \left(\int_{x^2-4x+5}^{6x-3-x^2} \frac{1}{x} dy \right) dx = \\ &= \int_1^4 \left(-2x + 10 - \frac{8}{x} \right) dx = \left[-x^2 + 10x - 8 \ln x \right]_1^4 = 15 - 16 \ln 2. \end{aligned}$$



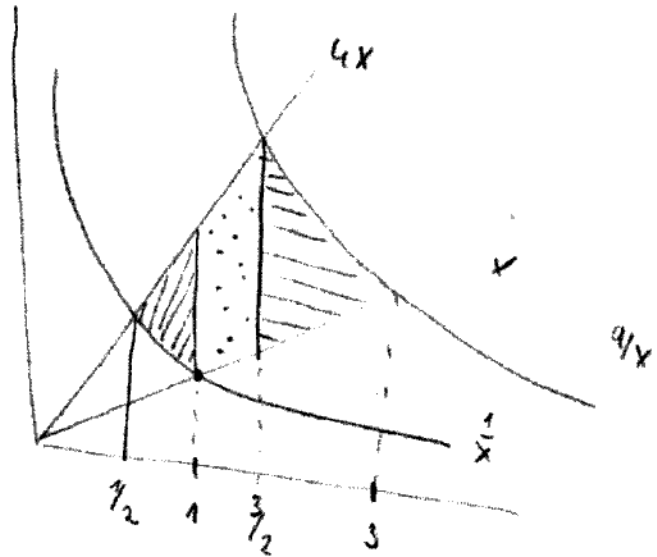
(3d)

$$\cdot \frac{1}{x} = 4x \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\cdot \frac{1}{x} = x \quad x = 1$$

$$\cdot \frac{9}{x} = 4x \quad x = \frac{3}{2}$$

$$\cdot \frac{9}{x} = x \quad x = 3$$



$$\int_{1/2}^1 \int_{1/x}^{4x} dy dx + \int_1^{3/2} \int_x^{4x} dy dx + \int_{3/2}^3 \int_x^{9/x} dy dx$$

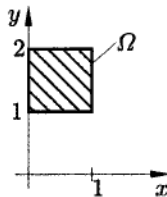
Část II

Integrační počet funkcí více proměnných

9 Dvojný integrál - Fubiniho věta

81. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} x^y dx dy$, kde $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$.

Řešení Integrační obor Ω je čtverec, tj. dvojrozměrný interval $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$. Viz Obrázek 11. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (y, x) .

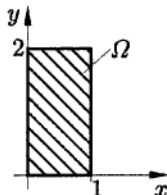
Obrázek 11: $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$

$$\iint_{\Omega} x^y dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy = \int_1^2 \frac{1}{y+1} dy = \left[\ln |y+1| \right]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}.$$

V případě, že oblast Ω budeme chápat jako oblast typu (x, y) , narazíme při výpočtu na integrál $\int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x} dx$, který nelze vyřešit v množině elementárních funkcí.

82. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} x^2 y e^{xy} dx dy$, kde $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.

Řešení Integrační obor Ω je obdélník $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$. Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (x, y) .

Obrázek 12: $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x^2 y e^{xy} dx dy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 x^2 y e^{xy} dx \right) dy = \int_0^2 \left(\left[\frac{x^2 y e^{xy}}{y} - \int \frac{2xy e^{xy}}{y} dy \right]_0^1 \right) dy = \int_0^2 \left(x y e^{xy} - x \int e^{xy} dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[(xy - 1) e^{xy} \right]_0^1 dy = \int_0^2 (2y - 1) e^{2y} + 1 dy = \int_0^2 2y e^{2y} dy + \int_0^2 e^{2y} dy + \int_0^2 1 dy = \left[x e^{2x} - e^{2x} - x \right]_0^1 = 2. \end{aligned}$$

83. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x + y - 1 \geq 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a kružnicí. Viz Obrázek 13. Oblast Ω je typu (x, y) i (y, x) . Zvolme typ (x, y) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.

$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x}{3} \left(\sqrt{(1-x^2)^3} - (1-x)^3 \right) dx = \frac{1}{20}.$$

Polární souřadnice

5. Zakreslete následující množiny:

$$(r \cos \alpha, r \sin \alpha),$$

(a) $r \in [0, 4], \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(b) $r \in [0, 4], \alpha \in [0, \pi]$

(c) $r \in [0, 4], \alpha \in [-\pi, \pi]$

(d) $r \in [0, 4], \alpha \in [0, 2\pi]$

(e) $r \in [1, 4], \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(f) $r \in [2, 4], \alpha \in [0, \pi]$

(g) $r \in [-1, 4], \alpha \in [-\pi, \pi]$

Řešení: Nakreslíme v programu.

6. Spočítejte za pomoci substituce

(a) Spočítejte obsah kruhu o poloměru $R > 0$.

Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha,$$

$$r \in (0, R), \alpha \in (0, 2\pi).$$

Integrál pak je tvaru:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R 1 \cdot r \, dr \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\alpha = \pi R^2$$

(b) $\int_M e^{-x^2-y^2} d\lambda$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x \leq 0; y \leq 0; x^2 + y^2 \leq 1\}$

Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

Z rovnic vyplýne

$$r^2 \leq 1$$

$$0 \geq r \cos \alpha$$

$$0 \geq r \sin \alpha$$

$$\text{Tedy } r \in (0, 1) \quad \alpha \in (\pi, 3\frac{\pi}{2}).$$

Integrál pak je tvaru:

$$\int_{\pi}^{3\frac{\pi}{2}} \int_0^1 e^{-r^2} r \, dr \, d\alpha = \int_{\pi}^{3\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^1 d\alpha = \int_{\pi}^{3\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2} (e^{-1} - 1) d\alpha = \frac{\pi}{2} (-\frac{1}{2} (e^{-1} - 1))$$

(c) $\int_M x \, d\lambda$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

Z rovnic vyplýne

$$\begin{aligned} 1 &\leq r^2 && \leq 4 \\ 0 &\leq r \cos \alpha \\ 0 &\leq r \sin \alpha \end{aligned}$$

Tedy $r \in (1, 2)$ $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Integrál pak je tvaru:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r \cos \alpha \cdot r \, dr \, d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \cos \alpha \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \, d\alpha = \frac{7}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \cos \alpha \, d\alpha = \frac{7}{3} [\sin \alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3}$$

(d) $\int_M (x^2 + y^2) \, d\lambda$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$

Řešení: Použijeme zobecněné polární souřadnice

$$\begin{aligned} x &= 3r \cos \alpha \\ y &= 2r \sin \alpha \end{aligned}$$

Z rovnic vyplýne

$$\begin{aligned} \frac{9r^2 \cos^2 \alpha}{9} + \frac{4r^2 \sin^2 \alpha}{4} &\leq 1 \\ r^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Tedy $r \in (0, 1)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$.

Integrál pak je tvaru (pozor na Jakobián):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (9r^2 \cos^2 \alpha + 4r^2 \sin^2 \alpha) 6r \, dr \, d\alpha &= 6 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 (5 \cos^2 \alpha + 4) \, dr \, d\alpha \\ &= 6 \int_0^{2\pi} (5 \cos^2 \alpha + 4) \frac{1}{4} [r^4]_0^1 \, d\alpha = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (5 \cos^2 \alpha + 4) \, d\alpha \end{aligned}$$

Pomocí vzorečku $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{13}{2} \alpha + \frac{5}{4} \sin(2\alpha) \right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2} \cdot 13\pi.$$

(e) $\int_M \arctan \frac{y}{x} \, d\lambda$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$

Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \\ y &= r \sin \alpha \end{aligned}$$

Z rovnic vyplýne

$$\begin{aligned} 0 &\leq r && \leq 1 \\ 0 &\leq \sin \alpha \\ 0 &\leq \cos \alpha \end{aligned}$$

Tedy $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $r \in (0, 1)$.

Integrál pak je tvaru:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \arctan(\tan \alpha) \cdot r \, dr \, d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \alpha \, d\alpha = \frac{\pi^2}{16}$$

(f) $\int_M \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} d\lambda$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2, y \geq 0\}$

Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

Z rovnic vyplýne

$$1 \leq r^2 \leq e$$

$$0 \leq r \sin \alpha$$

Tedy $r \in (1, \sqrt{e})$, $\alpha \in (0, \pi)$.

Integrál pak je tvaru:

$$\int_0^\pi \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log r^2}{r^2} \cdot r dr d\alpha$$

Ze substituce (obyčejná pro 1 proměnnou):

$$\int_0^\pi \frac{1}{4} [\log^2 r^2]_1^{\sqrt{e}} d\alpha = \int_0^\pi \frac{1}{4} d\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

(g) $\oint_M \sin \sqrt{x^2 + y^2} d\lambda$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$

Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

Z rovnic vyplýne

$$\pi^2 \leq r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha \leq 4\pi^2$$

$$\pi^2 \leq r^2 \leq 4\pi^2$$

Navíc $\alpha \in (0, 2\pi)$.

Integrál pak je tvaru:

$$\int_0^{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \sin \sqrt{r^2 \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \alpha} \cdot r dr d\alpha = \int_0^{2\pi} \int_\pi^{2\pi} r \sin r dr d\alpha$$

Z per partes

$$\int_0^{2\pi} \int_\pi^{2\pi} r \sin r dr d\alpha = \int_0^{2\pi} [-r \cos r + \sin r]_\pi^{2\pi} d\alpha = -3\pi \int_0^{2\pi} 1 d\alpha = -6\pi^2$$

7. Zapište následující množiny polárními souřadnicemi

červená: $r \in (1, 2)$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

modrá: $r \in (0, 3)$, $\alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$.

zelená: $r \in (1, 2)$, $\alpha \in (\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3})$.

