11. cvičení – 2D integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Fubiniova)**.** Nechť $n, m \in \mathbb{N}$, $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ je lebegueovsky měřitelná množina a $f : E \to \mathbb{R}$ je lebegueovsky měřitelná funkce. Předpokládejme, že integrál

$$\int_E f(x, y) \,\mathrm{d}\lambda^{n+m}$$

má smysl. Pak všechny integrály níže mají smysl a platí

$$\int_E f \,\mathrm{d}\lambda^{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E^{x,*}} f(x, y) \,\mathrm{d}\lambda^m(y) \right) \mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E^{*,y}} f(x, y) \,\mathrm{d}\lambda^n(x) \right) \mathrm{d}\lambda^m(y).$$

Věta 2 (o substituci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_M u(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t)) |J\varphi(t)|\, dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Algoritmus

1. Nakreslíme množinu.
2. Určíme meze, případně aplikujeme polární souřadnice.
3. Nezapomeneme na Jakobián a spočteme.

Hint

$$\int \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t \qquad \int \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t \qquad \int t \sin t \,\mathrm{d}t = \sin t - t \cos t$$

Příklady

Zdroje příkladů a řešení:

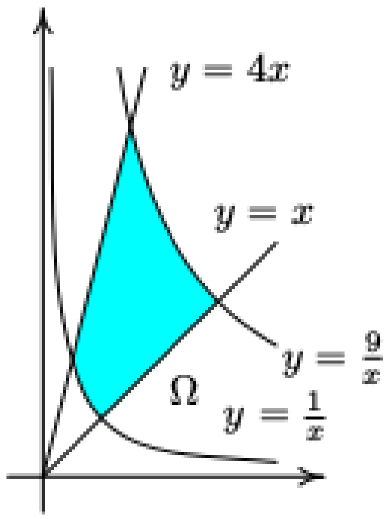
http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf
https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=602492416
https://fix.prf.jcu.cz/~eisner/lock/UMB-566-materialy/matematika-sbirka-III-Krivkovy_integral.pdf
https://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/ip2.pdf
https://is.muni.cz/el/1433/jaro2009/MB102/7448541/skripta4.pdf
https://math.fel.cvut.cz/en/people/habala/teaching/veci-ma2/ma2r4.pdf
http://www.matematika-lucerna.cz/matalyza/resene-matika3.pdf

Dvojný integrál

1. Vypočítejte dvojný integrál přes množinu M
   (a) $\displaystyle\int_M x \sin y \, \mathrm{d}\lambda$, kde $M = [1,2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$
   (b) $\displaystyle\int_M y \, \mathrm{d}\lambda$, kde M je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0$ a $x + y - 4 = 0$.
   (c) $\displaystyle\int_M \frac{x}{y^2} \, \mathrm{d}\lambda$, kde M je určena vztahy $1 \le x \le y \le 3$.
   (d) $\displaystyle\int_M e^{x/y} \, \mathrm{d}\lambda$, kde M je určena vztahy $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ a $y^2 = x$
   (e) $\displaystyle\int_M xy^2 \, \mathrm{d}\lambda$ M je určena vztahy $x^2 + y^2 - 1 \le 0$ a $x + y - 1 \ge 0$.
   (f) $\displaystyle\int_M 1 \, \mathrm{d}\lambda$, kde M je určena vztahy $x + y = 4$, $x + y = 12$ a $y^2 = 2x$.
2. Změňte pořadí integrace

   (a) $\displaystyle\int_2^3 \int_2^{8-2x} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{e^y} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^x f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

3. Sestavte (nepočítejte) integrály z funkce $f(x,y) = \sin^2 x \cos xy^3$ přes množiny
   (a) $M = \{[x,y]; x \le 2; 1 \le y \le e^x\}$
   (b) $M = \{[x,y]; 0 \le x \le 2; -x \le y \le x^2\}$
   (c) $M = \{[x,y]; x^2 - 4x + 5 \le y \le 6x - 3 - x^2\}$
   (d) M na obrázku



Bonus

4. Spočtěte integrál $\displaystyle\int_M x^y \, \mathrm{d}\lambda$, kde $M = [0,1] \times [1,2]$. Zkuste zaměnit pořadí integrace.

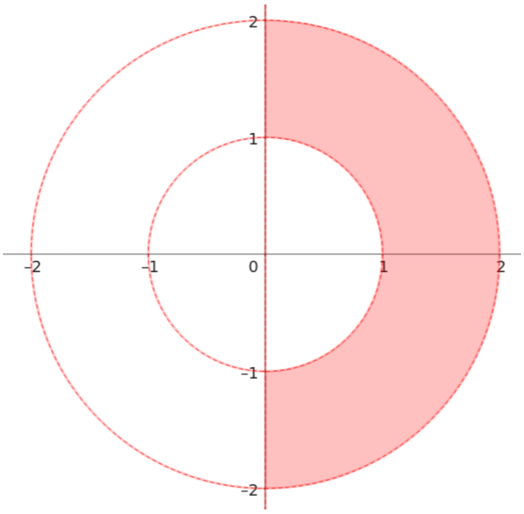
Polární souřadnice

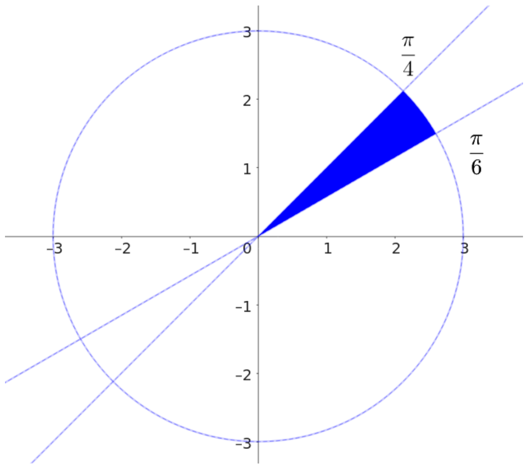
5. Zakreslete následující množiny:
$(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$,

   (a) $r \in [0,4]$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$
   (b) $r \in [0,4]$, $\alpha \in [0, \pi]$
   (c) $r \in [0,4]$, $\alpha \in [-\pi, \pi]$
   (d) $r \in [0,4]$, $\alpha \in [0, 2\pi]$
   (e) $r \in [1,4]$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$
   (f) $r \in [2,4]$, $\alpha \in [0, \pi]$
   (g) $r \in [-1,4]$, $\alpha \in [-\pi, \pi]$

6. Spočtěte za pomoci substituce
   (a) Spočtěte obsah kruhu o poloměru $r > 0$.
   (b) $\displaystyle\int_M e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x \le 0; y \le 0; x^2+y^2 \le 1\}$
   (c) $\displaystyle\int_M x\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x, y \ge 0, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$
   (d)❀ $\displaystyle\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\}$
   (e) $\displaystyle\int_M \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \le 1, y \ge 0\}$
   (f) $\displaystyle\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \le x^2+y^2, y \ge 0\}$
   (g)❁ $\displaystyle\int_M \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$

7. Zapište následující množiny polárními souřadnicemi





(6d) $3r\cos\alpha, 2r\sin\alpha$, $J = 6r$
(6g) $\int t\sin t\,\mathrm{d}t = -t\cos t + \sin t$

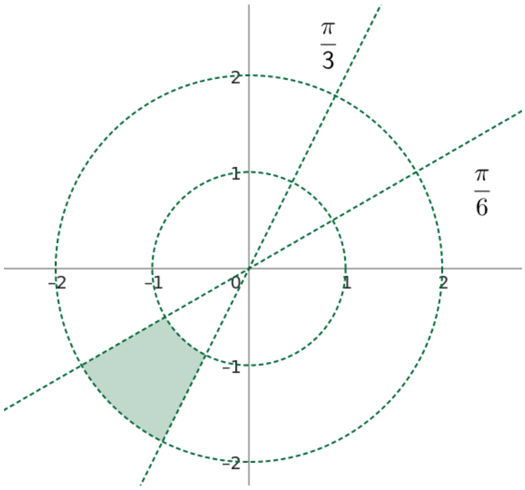


Figure 1: http://brownsharpie.courtneygibbons.org/wp-content/comics/2006/10/2006-10-15-polar-coordinates.jpg