10. cvičení – Lagrangeovy multiplikátory

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

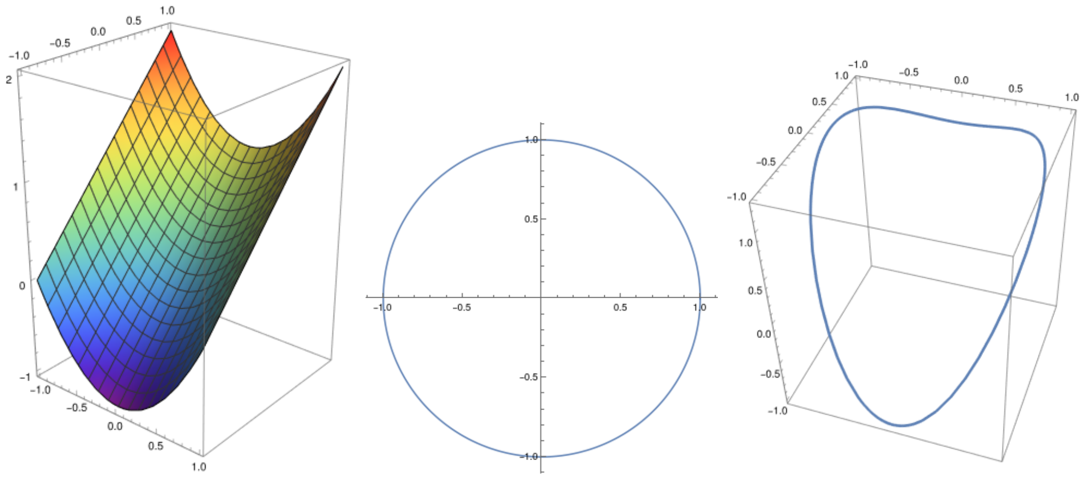
1. Najděte globální extrémy funkcí na množině M

   (a) $f(x,y) = x^2 + y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

   Řešení:

   Zdroj: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

   - Označme $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x,y) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
     Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená. M je navíc omezená - jde o kružnici se středem v počátku a poloměrem 1. Tedy M je kompakt.
     Tedy funkce f nabývá na M extrémů.



   - Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
     - Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

       $$\nabla g = (2x, 2y) = (0,0).$$

       Tedy $(x,y) = (0,0)$. Tento bod ale neleží v M.
     - Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

       $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} 2x + \lambda \cdot 2x &= 0 \\ 1 + \lambda \cdot 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice máme

$$2x(1 + \lambda) = 0.$$

Tedy $x = 0$ nebo $\lambda = -1$.
Pokud $x = 0$, tak z vazební podmínky je

$$y^2 = 1$$

tedy máme podezřelé body $[0, 1]$ a $[0, -1]$.
Pokud $\lambda = -1$, tak z druhé rovnice je $y = \frac{1}{2}$. Z vazební podmínky pak máme podezřelé body $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ a $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 1 \\ f(0,-1) &= -1 \\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{4} \\ f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

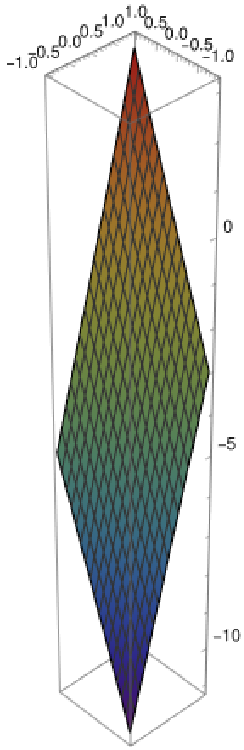
Tedy funkce nabývá minima v bodě $[0, -1]$ s hodnotou -1 a maxima v bodech $[\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ s hodnotou $\frac{5}{4}$.

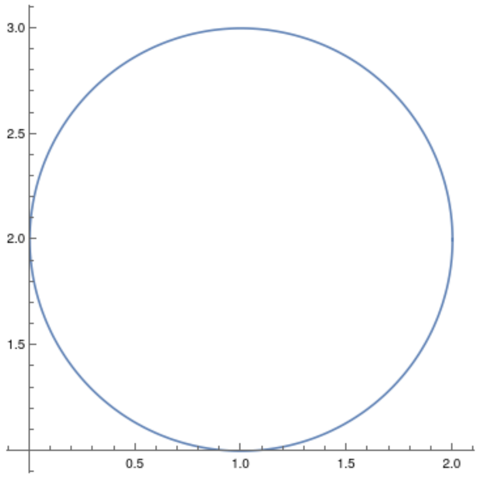
(b) $f(x, y) = 4x + 3y - 4$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1\}$
Řešení:
Zdroj: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

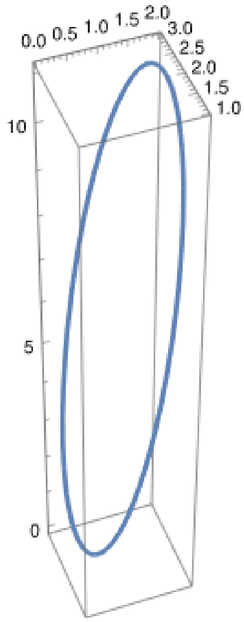
- Označme $g(x, y) = (x-1)^2+(y-2)^2-1$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x, y) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená. M je navíc omezená - jde o kružnici se středem v bodě $[1, 2]$ a poloměrem 1. Tedy M je kompakt.
Tedy funkce f nabývá na M extrémů.
- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g = (2x - 2, 2y - 4) = (0, 0).$$

Tedy $(x, y) = (1, 2)$. Tento bod ale neleží v M.







– Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\
g(x,y) &= 0
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
4 + \lambda \cdot 2(x-1) &= 0 \\
3 + \lambda \cdot 2(y-2) &= 0 \\
(x-1)^2 + (y-2)^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$
\begin{aligned}
x - 1 = -\frac{2}{\lambda} \\
y - 2 = -\frac{3}{2\lambda}
\end{aligned}
$$

(Vyloučili jsme možnost $\lambda = 0$, protože nesplňuje soustavu rovnic.) Dosazením do vazební podmínky získáme

$$\lambda = \pm\frac{5}{2}$$

tedy máme podezřelé body $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ a $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right) &= 1 \\ f\left(\frac{9}{5},\frac{13}{5}\right) &= 11 \end{aligned}$$

  Tedy funkce nabývá minima v bodě $[\frac{1}{5},\frac{7}{5}]$ s hodnotou 1 a maxima v bodě $[\frac{9}{5},\frac{13}{5}]$. s hodnotou 11.

(c) $f(x,y,z) = x - y + 3z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$
Řešení:
Zdroj: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

- Označme $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x,y,z) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
  Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená. M je navíc omezená - jde o povrch elipsoidu se středem v počátku, který se vejde do koule $B(o,3)$. Tedy M je kompakt.
  Tedy funkce f nabývá na M extrémů.

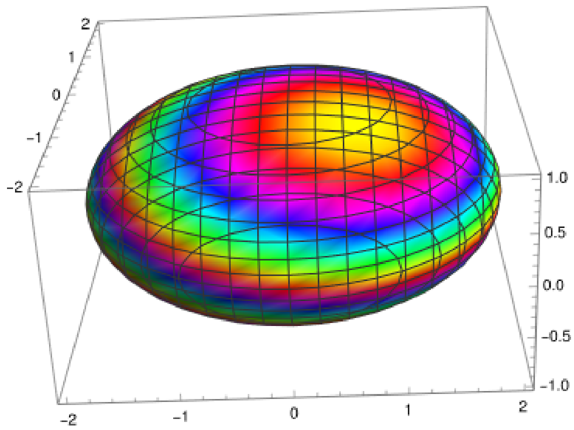


Figure 1: Obarvení povrchu naznačuje funkční hodnotu

- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetříme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

    $$\nabla g = (2x, 2y, 4z) = (0,0,0).$$

    Tedy $(x,y,z) = (0,0,0)$. Tento bod ale neleží v M.

– Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial y} &= 0\\ \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial y} &= 0\\ g(x,y,z) &= 0\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}1+\lambda\cdot 2x &= 0\\ -1+\lambda\cdot 2y &= 0\\ 3+\lambda\cdot 8z &= 0\\ x^2+y^2+4z^2-4 &= 0.\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$\begin{aligned}x &= -\frac{1}{2\lambda}\\ y &= \frac{1}{2\lambda}\\ z &= -\frac{3}{8\lambda}\end{aligned}$$

(Vyloučili jsme možnost $\lambda = 0$, protože nesplňuje soustavu rovnic.) Dosazením do vazební podmínky získáme

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{8}$$

tedy máme podezřelé body $[\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}]$. a $[-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right) &= \sqrt{17}\\ f\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}\right) &= -\sqrt{17}\end{aligned}$$

Tedy funkce nabývá minima v bodě $\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}\right)$ s hodnotou $-\sqrt{17}$ a maxima v bodě $\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right)$ s hodnotou $\sqrt{17}$.

(d) $f(x,y,z) = x+2y+3z,\ M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x-y+z = 1, x^2+y^2 = 1\}$
Řešení:
Zdroj: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

- Označme $g_1(x,y,z) = x - y + z - 1$, $g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^3$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g_1(x,y,z) = 0$ a zároveň $g_2(x,y,z) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
  Dále uvažujme $M_1 = g_1^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M_1 uzavřená. Analogicky Dále uvažujme $M_2 = g_2^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M_2 uzavřená. Protože $M = M_1 \cap M_2$, jde o průnik dvou uzavřených, tedy je také uzavřená. M je navíc omezená - jde o průnik válce a roviny. Máme tedy $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, odsud $-1 \leq z \leq 3$. Tedy M je kompakt.
  Tedy funkce f nabývá na M extrémů.

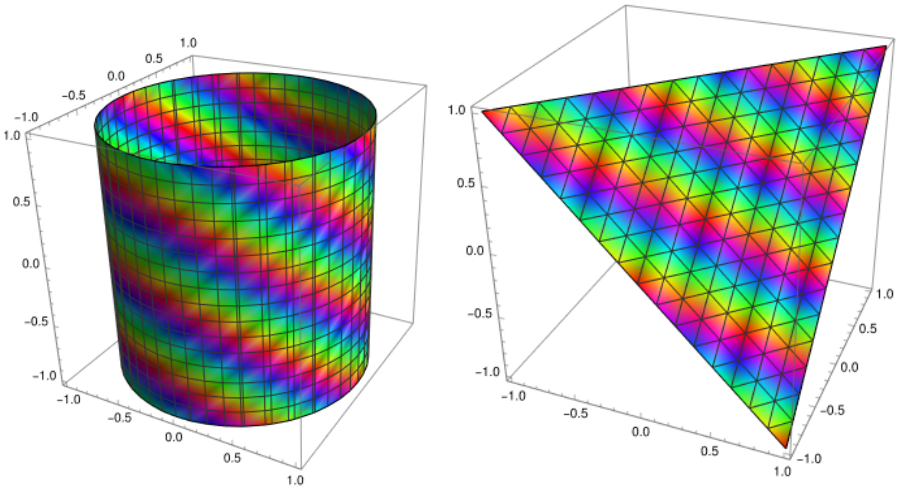


Figure 2: Obarvení povrchu naznačuje funkční hodnotu

- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetřeme body, kde jsou vektory ∇g_1 a ∇g_2 lineárně nezávislé. Hledáme tedy body, kde

    $$\nabla g_1 = (1, -1, 1) = k \nabla g_2 = (2x, 2y, 0)$$

    Tedy $(x,y,z) = (0,0,0)$. Tento bod ale neleží v M.
  - Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátory λ a μ.

    $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y} + \mu \cdot \frac{\partial g_2}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y} + \mu \cdot \frac{\partial g_2}{\partial z} &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

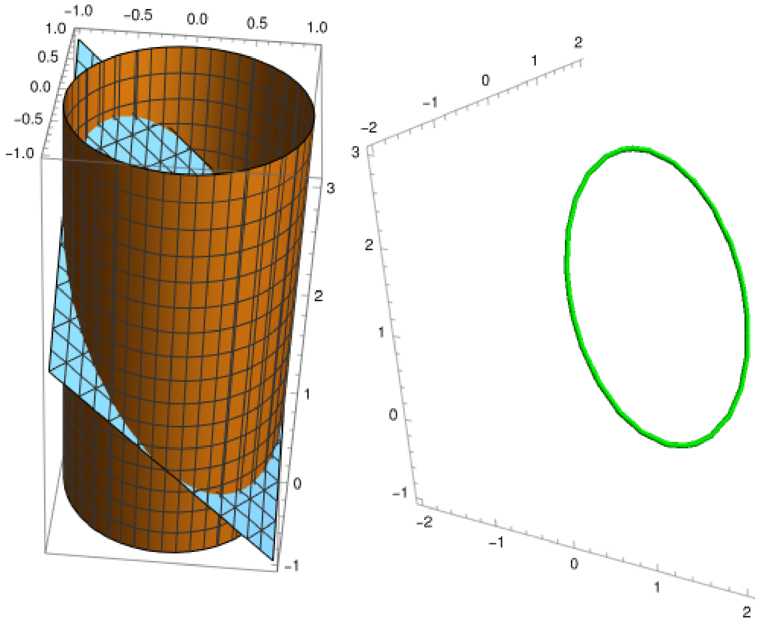


Figure 3: Takto vypadá vazba

Tedy

$$\begin{aligned}1+\lambda\cdot 1+\mu\cdot 2x &= 0\\ 2+\lambda\cdot -1+\mu\cdot 2y &= 0\\ 3+\lambda\cdot 1+\mu\cdot 0 &= 0\\ x-y+z-1 &= 0\\ x^2+y^2-1 &= 0.\end{aligned}$$

Ze třetí rovnice máme, že $\lambda=-3$. Z prvních dvou rovnic máme

$$x=\frac{1}{\mu}$$
$$y=-\frac{5}{2\mu}$$

(Vyloučili jsme možnost $\mu=0$, protože nesplňuje soustavu rovnic.) Dosazením do vazební podmínky získáme

$$\mu=\pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

tedy máme podezřelé body $[\frac{2}{\sqrt{29}},-\frac{5}{\sqrt{29}},1-\frac{7}{\sqrt{29}}]$ a $[-\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}},1+\frac{7}{\sqrt{29}}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2}{\sqrt{29}},-\frac{5}{\sqrt{29}},1-\frac{7}{\sqrt{29}}\right) &= 3-\sqrt{29}\\ f\left(-\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}},1+\frac{7}{\sqrt{29}}\right) &= 3+\frac{9}{\sqrt{29}}\end{aligned}$$

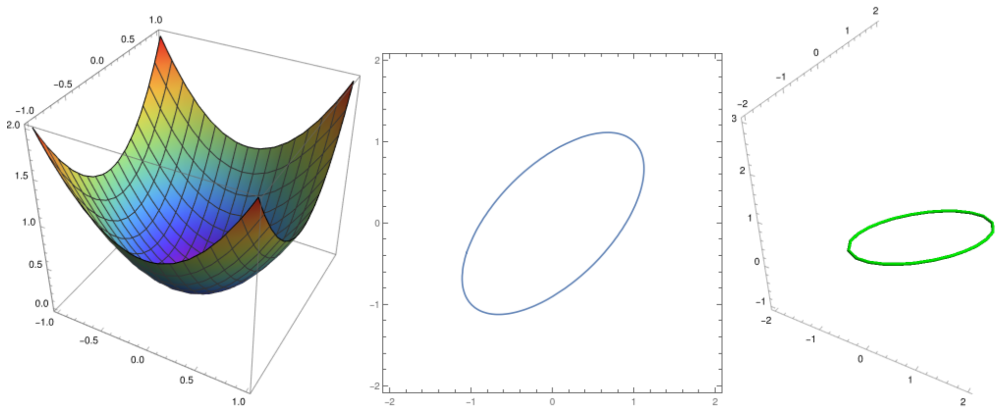
Tedy funkce nabývá minima v bodě $\left[\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1-\frac{7}{\sqrt{29}}\right]$ s hodnotou $3-\sqrt{29}$ a maxima v bodě $\left[-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1+\frac{7}{\sqrt{29}}\right]$ s hodnotou $3+\frac{9}{\sqrt{29}}$

(e) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0\}$

Řešení:

Zdroj: https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf

- Označme $g(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x,y) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená.
M je navíc omezená - jde o pootočenou elipsu (to by se ukázalo, kdybychom „otočili“ soustavu souřadnic). Omezenost plyne z těchto odhadů:
$$5(x^2+y^2) = 4 + 6xy \leq 4 + 3(x^2+y^2)$$
tedy
$$2(x^2+y^2) \leq 4$$
Tedy M je kompakt.
Tedy funkce f nabývá na M extrémů.



- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde
  $$\nabla g = (10x - 6y, -6x + 10y) = (0,0).$$
  Tedy $(x,y) = (0,0)$. Tento bod ale neleží v M.
  - Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ.
  $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} 2x + \lambda \cdot (10x - 6y) &= 0 \\ 2y + \lambda \cdot (-6x + 10y) &= 0 \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$\begin{aligned} x(5\lambda + 1) = 3\lambda y \\ y(5\lambda + 1) = 3\lambda x \end{aligned}$$

Vyloučíme možnost $\lambda = 0$, protože pak by byl řešením bod $(0,0)$, který nesplňuje vazební podmínku. Analogicky vyloučíme možnost $(5\lambda+1) = 0$. Uvažujeme-li $x = 0$, tak opět vyjde řešení $(0,0)$. Analogicky pro $y = 0$. Můžeme tedy obě rovnice vynásobit postupně y a x. Dostaneme

$$\begin{aligned} yx(5\lambda + 1) = 3\lambda y^2 \\ xy(5\lambda + 1) = 3\lambda x^2 \end{aligned}$$

Tedy $y = \pm x$.
Dosazením do vazební podmínky získáme pro $y = x$

$$5x^2 - 6x^2 + 5x^2 - 4 = 0$$

a pro $y = -x$

$$5x^2 + 6x^2 + 5x^2 - 4 = 0$$

tedy máme podezřelé body $[1,1]$, $[-1,-1]$, $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 2 \\ f(-1,-1) &= 2 \\ f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} \\ f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tedy funkce nabývá minima v bodech $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ s hodnotou $\frac{1}{2}$ a maxima v bodech $[1,1]$, $[-1,-1]$ s hodnotou 2.

Zkouškové příklady

Zdroj: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/vyuka.php

2. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x,y,z) = xy + yz$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$
   (b) $f(x,y,z) = z + e^{xy}$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$
   (c) $f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

2a) **Příklad A4 :** Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0,y]$; $y \in (-2,2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^4 + y^4 = 16, x > -1\}, \qquad H_2 = \{[-1,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^4 + y^4 - 16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y^3, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned}
&(1) && x^4 + y^4 = 16,\\
&(2) && 4x^3y = \lambda 4x^3,\\
&(3) && x^4 = \lambda 4y^3.
\end{aligned}$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \pm 2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \quad \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \quad \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \quad \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$.

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1,y) = y, \qquad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \qquad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$ a minima v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$.

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 8x^3y + 3x^2 + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^4 + 3y^2 + x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(1,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0,$$
$$8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$
$$24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)$$
$$+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

2b)

Příklad B4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M. Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0,\ y > 0\},$$
$$H_2 = \{[0,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle 0,1\rangle\},$$
$$H_3 = \{[x,0] \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle 0,1\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1$ na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

(1) $$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1,$$

(2) $$2 = \lambda\frac{1}{4}x^{-3/4},$$

(3) $$4 = \lambda\frac{1}{4}y^{-3/4}.$$

Z (2) a (3) vyplývá, že $x = 2\sqrt[3]{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[\frac{2^{4/3}}{(2^{1/3}+1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3}+1)^4}\right].$$

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(0,y) = 4y, \qquad y \in \langle 0,1 \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[0,1]$.

Podobně zkoumejme chování na množině H_3. Funkce f má na H_3 tvar:

$$f(x,0) = 2x, \qquad x \in \langle 0,1 \rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[1,0]$.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $[0,1]$ a minima v bodě $[0,0]$.

Příklad B5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Nyní integrujme jednotlivé parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x+1}\,dx &\overset{c}{=} \log|x+1|, \\
\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{((2x+1)/\sqrt{3})^2+1} \\
&\overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Dohromady tedy máme

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx \overset{c}{=} \log|x+1| + \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$.

2c

Příklad F4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny M. Pro parciální derivace funkce f platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y).$$

Uvnitř množiny M hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z M, které splňují

$$2x(1-2(x^2+7y^2)) = 0,$$
$$2y(7-(x^2+7y^2)) = 0.$$

Řešením této soustavy jsou body $[0,0]$, $[1/\sqrt{2},0]$, $[-1/\sqrt{2},0]$, $[0,1]$, $[0,-1]$, pouze první tři však leží uvnitř množiny M.

Podezřelé body na hranici M hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina $H(M)$ je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1.$$

Funkce f i g jsou třídy $C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 8y.$$

Vektor $(2x, 8y)$ je nulový, právě když $[x,y] = [0,0]$. Tento bod ovšem neleží na hranici množiny M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$(1) \qquad 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x) = 2\lambda x,$$
$$(2) \qquad 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 8\lambda y,$$
$$(3) \qquad x^2 + 4y^2 = 1.$$

Z (1) vyplývá, že $x = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = \lambda$ a z (2) vyplývá, že $y = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)) = 4\lambda$. Pokud $x = 0$, pak podle (3) je $y = \pm 1/2$. Pokud $y = 0$, pak podle (3) je $x = \pm 1$. V případě, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$, musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)).$$

Odtud plyne $7(x^2+7y^2) = -3$, což je spor.

Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0,0],\ [1/\sqrt{2},0],\ [-1/\sqrt{2},0],\ [0,1/2],\ [0,-1/2],\ [1,0],\ [-1,0].$$

Funkce f nabývá maxima v bodech $[0,1/2]$, $[0,-1/2]$ a minima v bodě $[0,0]$.

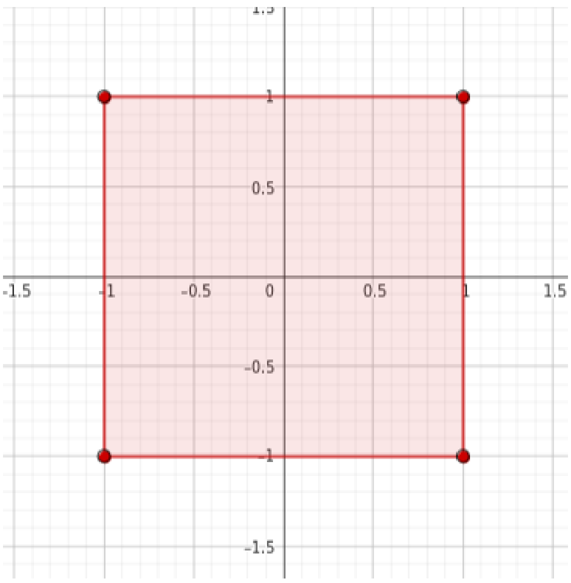
Bez Lagreangeových multiplikátorů

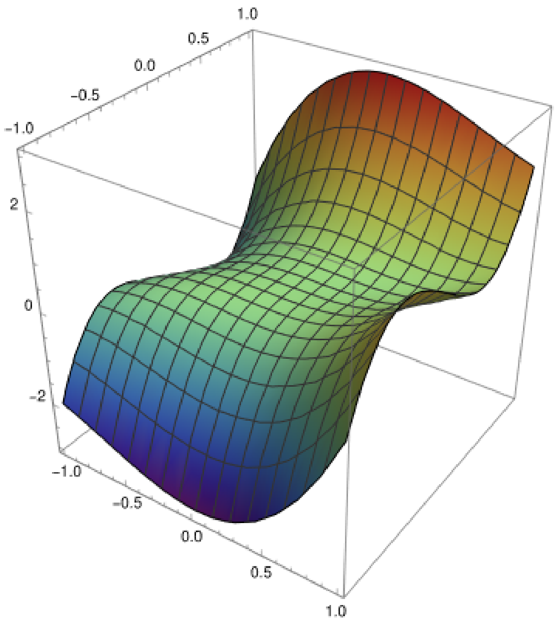
3. Najděte extrémy funkcí na množině

   (a) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$ na $M = [-1;1]^2$

   Řešení: Příklad máme z https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf

   - Množina M je čtverec s vrcholy $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ a $(-1,1)$.
     Funkce $f(x,y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená (součin dvou uzavřených intervalů) a omezená, tedy je kompaktní.
     Tedy f na M nabývá extrémů.





   - Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $(-1,1) \times (-1,1)$. Parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + 9y^2.$$

     Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(0,0)$. Máme tedy první podezřelý bod.

   - Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 4 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f.

     i. $y = -1$, $x \in (-1,1)$. Máme

$$g(x) = f(x,-1) = x^3 + 2x^2 - 3.$$

     Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 3x^2 + 4x = x(3x+4)$$

     Nulové derivace jsou pro $x = 0$ a $x = -\frac{4}{3}$. Druhý bod neleží v M. Dostáváme tedy podezřelý bod $(0,-1)$.

ii. $y = 1$, $x \in (-1, 1)$. Máme

$$g(x) = f(x, 1) = x^3 - 2x^2 + 3.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$ a $x = \frac{4}{3}$. Druhý bod neleží v M. Dostáváme tedy podezřelý bod $(0, 1)$.

iii. $x = -1$, $y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(-1, y) = 3y^3 - 2y - 1.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = 9y^2 - 2$$

Nulové derivace jsou pro $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{2}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(-1, \frac{1}{3}\sqrt{2})$. a $(-1, -\frac{1}{3}\sqrt{2})$.

iv. $x = 1$, $y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(1, y) = 3y^3 - 2y + 1.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = 9y^2 - 2$$

Nulové derivace jsou pro $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{2}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(1, \frac{1}{3}\sqrt{2})$. a $(1, -\frac{1}{3}\sqrt{2})$.

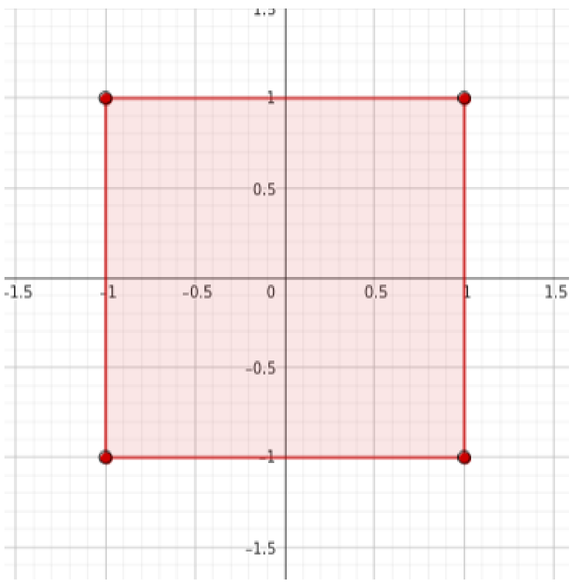
- Přidáme vrcholy čtverce. Tedy podezřelé body: $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

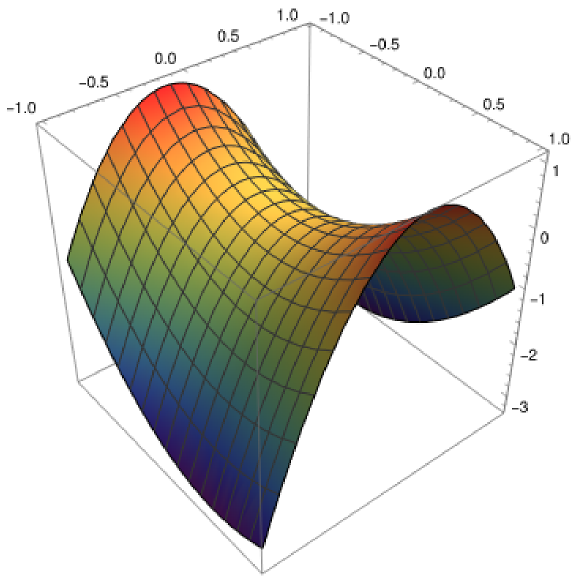
$$\begin{aligned}
f(0, 0) &= 0, \\
f(-1, 1) &= 0, \\
f(1, 1) &= 2, \\
f(1, -1) &= 0, \\
f(-1, -1) &= -2, \\
f(0, 1) &= 3, \\
f(0, -1) &= -3, \\
f(-1, \frac{1}{3}\sqrt{2}) &= -1 - \frac{4}{9}\sqrt{2} \\
f(-1, -\frac{1}{3}\sqrt{2}) &= \frac{4}{9}\sqrt{2} - 1 \\
f(1, \frac{1}{3}\sqrt{2}) &= 1 - \frac{4}{9}\sqrt{2} \\
f(1, -\frac{1}{3}\sqrt{2}) &= 1 + \frac{4}{9}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodě $(0,1)$, $f(0,1) = 3$ a minimum v $(0,-1)$, $f(0,-1) = -3$.

(b) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1, |y| \le 1\}$
Řešení: Příklad máme z Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

- Množina M je čtverec s vrcholy $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ a $(-1,1)$.
  Funkce $f(x,y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená (součin dvou uzavřených intervalů) a omezená, tedy je kompaktní.
  Tedy f na M nabývá extrémů.





- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $(-1,1) \times (-1,1)$. Parciální derivace:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6y + x$$
Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(0,0)$. Máme tedy první podezřelý bod.
- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 4 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f.
  i. $y = -1$, $x \in (-1,1)$. Máme
  $$g(x) = f(x,-1) = x^2 - x - 3$$
  Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:
  $$g'(x) = 2x - 1$$
  Nulové derivace jsou pro $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(\frac{1}{2}, -1)$.

ii. $y = 1$, $x \in (-1, 1)$. Máme

$$g(x) = f(x, 1) = x^2 + x - 3.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x + 1$$

Nulové derivace jsou pro $x = -\frac{1}{2}$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(-\frac{1}{2}, 1)$.

iii. $x = -1$, $y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(-1, y) = 1 - y - 3y^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = -1 - 6y$$

Nulové derivace jsou pro $y = -\frac{1}{6}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(-1, -\frac{1}{6})$.

iv. $x = 1$, $y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(1, y) = 1 + y - 3y^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = 1 - 6y$$

Nulové derivace jsou pro $y = \frac{1}{6}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(1, \frac{1}{6})$.

- Přidáme vrcholy čtverce. Tedy podezřelé body: $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \\ f(-1,1) &= -3, \\ f(1,1) &= -1, \\ f(1,-1) &= -3, \\ f(-1,-1) &= -1, \\ f(\frac{1}{2},-1) &= -\frac{13}{4}, \\ f(-\frac{1}{2},1) &= -\frac{13}{4}, \\ f(-1,-\frac{1}{6}) &= \frac{13}{12}, \\ f(1,\frac{1}{6}) &= \frac{13}{12}, \end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodech $(1, \frac{1}{6})$ a $(-1, -\frac{1}{6}$ a má hodnotu $13/12$. Minimum v $(-\frac{1}{2}, 1)$ a $(\frac{1}{2}, -1)$ a má hodnotu $-13/4$.

(c) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 4\}$
Řešení: Příklad máme z `http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf`

- Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(4,4)$ a $(0,4)$.
Funkce $f(x,y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená: jde o průník tří polorovin, které jsou uzavřené množiny. Konkrétně:

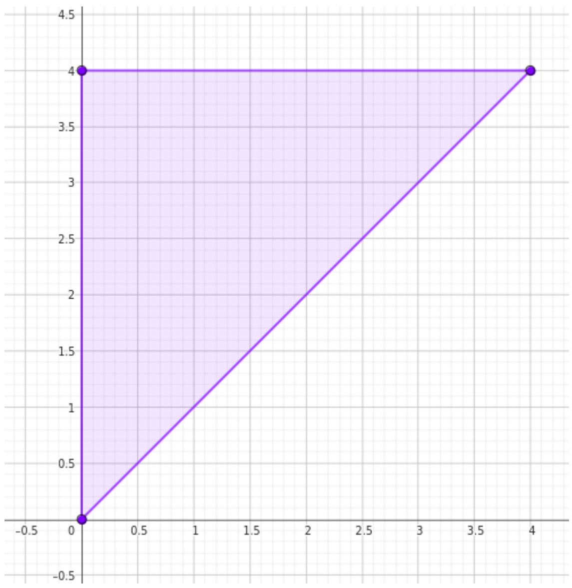
$$M_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} = g_1^{-1}([0,\infty)), \qquad g_1(x,y) = x$$

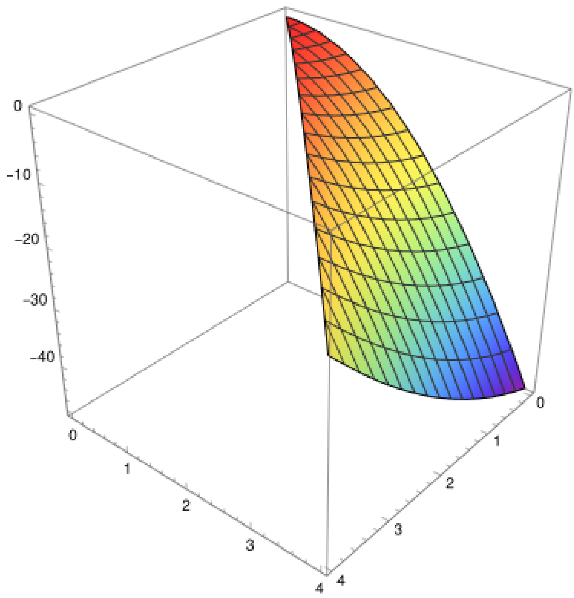
$$M_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 4\} = g_2^{-1}((-\infty,4]), \qquad g_2(x,y) = y$$

a

$$M_3 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\} = g_3^{-1}([0,\infty)), \qquad g_3(x,y) = y - x$$

Tedy $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3$. Průnik 3 uzavřených množin je uzavřená množina.
Množina je zároveň omezená: $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$.
Tedy je M kompaktní.
Tedy f na M nabývá extrémů.





- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na vnitřku množiny. Parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6y + 18$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(\frac{1}{2}, 3)$. Máme tedy první podezřelý bod.

- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 3 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f.
  i. $x = 0$, $y \in (0,4)$. Máme

$$g(y) = f(0,y) = -3y^2 + 18y + 4$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = -6y + 18$$

Nulové derivace jsou pro $y = 3$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(0,3)$.

ii. $y = 4$, $x \in (0,4)$. Máme

$$g(x) = f(x,4) = x^2 - x + 28.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x - 1$$

Nulové derivace jsou pro $x = \frac{1}{2}$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(\frac{1}{2}, 4)$.

iii. $y = x$, $x \in (0,4)$. Máme

$$g(x) = f(x,x) = -2x^2 + 17x + 4$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = -4x + 17$$

Nulové derivace jsou pro $x = 17/4$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(17/4, 17/4)$, který ale neleží v M.

- Přidáme vrcholy trojúhelníka. Tedy podezřelé body: $(0,0)$, $(4,4)$ a $(0,4)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 4, \\ f(4,4) &= 40, \\ f(0,4) &= 28, \\ f(\frac{1}{2},3) &= 123/4, \\ f(\frac{1}{2},4) &= 111/4, \\ f(0,3) &= 31, \end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodě $(4,4)$ a má hodnotu 40. Minimum v $(0,0)$ a má hodnotu 4.

(d) $f(x,y) = (x-y)^2 + x^2$ na M,
kde M je čtverec s vrcholy $A = [2,0]$, $B = [0,2]$, $C = [-2,0]$, $D = [0,-2]$
Řešení: Příklad máme z http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf

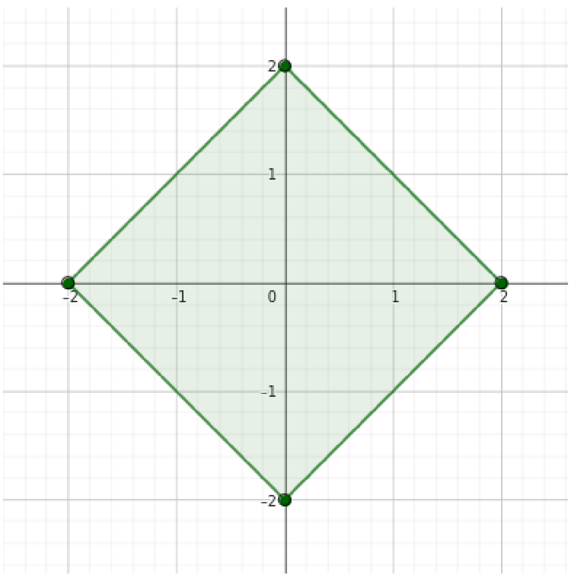
- Množina M je čtverec postavený na špičku s vrcholy $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, a $(0,-2)$.
Funkce $f(x,y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená: jde o průnik dvou uzavřených množin. Konkrétně:

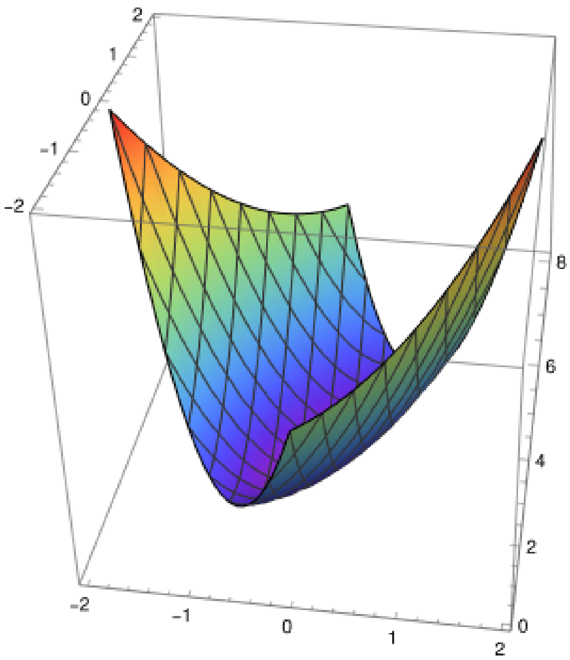
$$M_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x - 2 \leq y \leq x + 2\} = g_1^{-1}([-2,2]), \qquad g_1(x,y) = y - x$$

a

$$M_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : -x - 2 \leq y \leq -x + 2\} = g_2^{-1}([-2, 2]), \qquad g_1(x, y) = y + x$$

Tedy $M = M_1 \cap M_2$. Průnik 2 uzavřených množin je uzavřená množina.
Množina je zároveň omezená: $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$.
Tedy je M kompaktní.
Tedy f na M nabývá extrémů.





- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na vnitřku množiny. Parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 2y$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(0, 0)$. Máme tedy první podezřelý bod.

- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 4 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f.
  i. $y = -x + 2$, $x \in (0, 2)$. Máme

$$g(x) = f(x, -x + 2) = (2x - 2)^2 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 10x - 8$$

Nulové derivace jsou pro $x = 4/5$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(4/5, 6/5)$.

ii. $y = x + 2$, $x \in (-2, 0)$. Máme

$$g(x) = f(x, x+2) = 4 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$. Tento bod neleží na vnitřku dané úsečky, tedy jej budeme uvažovat až později (jako vrchol čtverce).

iii. $y = -x - 2$, $x \in (-2, 0)$. Máme

$$g(x) = f(x, -x-2) = (2x+2)^2 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 10x + 8$$

Nulové derivace jsou pro $x = -4/5$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(-4/5, -6/5)$.

iv. $y = x - 2$, $x \in (0, 2)$. Máme

$$g(x) = f(x, x-2) = 4 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$. Tento bod neleží na vnitřku dané úsečky, tedy jej budeme uvažovat až později (jako vrchol čtverce).

- Přidáme vrcholy čtverce. Tedy podezřelé body: $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, a $(0, -2)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \\ f(2,0) &= 8, \\ f(0,2) &= 4, \\ f(-2,0) &= 8, \\ f(0,-2) &= 4, \\ f(4/5, 6/5) &= 4/5, \\ f(-4/5, -6/5) &= 4/5, \end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodech $(2, 0)$ a $(-2, 0)$ a má hodnotu 8. Minimum v $(0, 0)$ a má hodnotu 0.

4. Určete maximální možný objem kvádru, jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, jeden jeho vrchol leží v počátku a diagonálně protilehlý vrchol leží v množině $M = \{[x, y, z], x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4x + 2y + z = 2.\}$

(4) kvádr A-H, $A = [0,0,0]$

$G \in M$:

$$M = \{[x,y,z] : 4x+2y+z=2 \quad x,y,z \geq 0\}$$

Cíl: max objem

$G = [x_0, y_0, z_0]$

hledáme max $f(x,y,z) = xyz$ (mělo by být $|xyz|$, ale naše $x,y,z \geq 0$)

$$g(x,y,z) = 4x+2y+z-2$$

(1) $\nabla g = (4,2,1) \neq 0$ nikdy

(2) $f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = 0$ $\quad xyz + \lambda(4x+2y+z-2) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $yz + 4\lambda = 0$ $\qquad yz - 4xy = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $xz + 2\lambda = 0$ $\qquad xz - 2xy = 0$

$\frac{\partial}{\partial z}$: $xy + \lambda = 0$ $\to \lambda = -xy \to$

navíc $4x+2y+z=0$ $\qquad 4x+2y+z=0$

$$\to \left.\begin{aligned} -yz+4xy&=0 \\ 2xz-4xy&=0 \end{aligned}\right\} \to 2xz - yz = 0 \to z(2x-y) = 0$$

$4x+2y+z=0$ $\qquad 4x+2y+z=0$ $\qquad 4x+2y+z=0$

(a) $z=0$ $\to$ tam max stejně nebude (místo kvádru by byl obdélník)

$\to$ (b) $\boxed{y=2x}$, $4x+2y+z=0$

$\rightarrow \quad 4x + 2\cdot 2x + z = 2$

$\rightarrow \quad \boxed{2 - 8x = z}$ (a máme $y = 2x$)

dosadíme do $\boxed{xz - 2xy = 0}$

$\rightarrow \quad x(2-8x) - 2x \cdot 2x = 0$

$2x - 8x^2 - 4x^2 = 0$

$2x(1-6x) = 0$

$x = 0$ (nebude max)

$\boxed{x = \frac{1}{6}}$ pak $\boxed{y = \frac{1}{3}}$ $z = 2 - \frac{8}{6}$

$\boxed{z = \frac{2}{3}}$

(jen pro formu $\lambda = -xy$ $\lambda = -\frac{1}{18}$).

Max. je v bodě $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

a hodnota je $\frac{2}{2\cdot 3\cdot 9} = \underline{\underline{\frac{1}{27}}}$

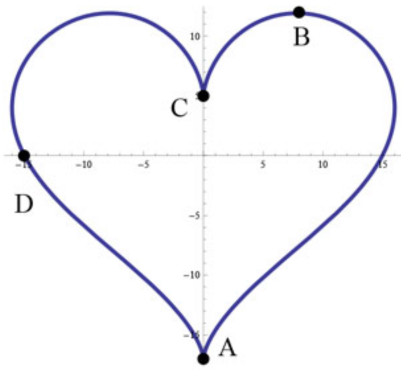
Bonusové příklady

5. Farmář a fařmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce tak, aby měl co největší plochu. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Ježto je u řeky, stačí jej oplotit ze 3 stran. Jaké bude zadání za pomoci Lagrangeových multiplikátorů?
   (a) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = 2x + y - 100$
   (b) $f(x, y) = 2x + 2y - 100$, $g(x, y) = xy$
   (c) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x + y - 100$
   (d) $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy - 100$

Figure 4: https://www.cbr.com/shaun-the-sheep-best-worst-episodes-imdb/

Řešení: (a)

6. Ve kterém z bodů A, B, C, D se nachází minimum funkce $f(x, y) = y$ vzhledem ke křivce na obrázku?



Zdroj: https://www.cpp.edu/conceptests/question-library/mat214.shtml
Řešení: A