7. cvičení – Implicitní funkce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Ukažte, že rovnice $(x^2+y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$ určuje na okolí bodu $[0,1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.
   Zdroj příkladu: http://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_3.pdf
   Řešení: Položme $F = (x^2+y^2)^2 - 3x^2y - y^3$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,1)$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$
   (b) $F(0,1) = 1 - 0 - 1 = 0$
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x^2+y^2)2y - 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 1 \neq 0$.

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y}-\delta, \bar{y}+\delta)$ s vlastností $F(x,y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon))$.
   Uvažujme původní rovnici (y je nyní funkce, pro názornost můžeme psát $y(x)$):

$$(x^2 + y(x)^2)^2 - 3x^2y(x) - y(x)^3 = 0$$

   Zderivujme obě strany podle x (pozor na vnitřní funkci) a vyjádřeme y:

$$\begin{aligned}
2(x^2+y(x)^2)(2x+2y(x)y'(x)) - 6xy(x) - 3x^2y'(x) - 3y(x)^2y'(x) &= 0\\
4x^3 + 4x^2y(x)y'(x) + 4xy(x)^2 + 4y(x)^3y(x)' - 6xy(x) - 3x^2y(x)' - 3y(x)^2y(x)' &= 0\\
y'(x)\left(4x^2y(x) + 4y(x)^3 - 3x^2 - 3y(x)^2\right) &= -4x^3 - 4xy(x)^2 + 6xy(x)\\
y'(x) &= \frac{-4x^3 - 4xy(x)^2 + 6xy(x)}{4x^2y(x) + 4y(x)^3 - 3x^2 - 3y(x)^2}
\end{aligned}$$

   Dosadíme $(x, y(x)) = (0,1)$ a získáme

$$y'(0) = \frac{0}{-1}.$$

   Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici (budeme pro zjednodušení psát y místo $y(x)$).

$$y'\left(4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2\right) = -4x^3 - 4xy^2 + 6xy$$

   Tedy

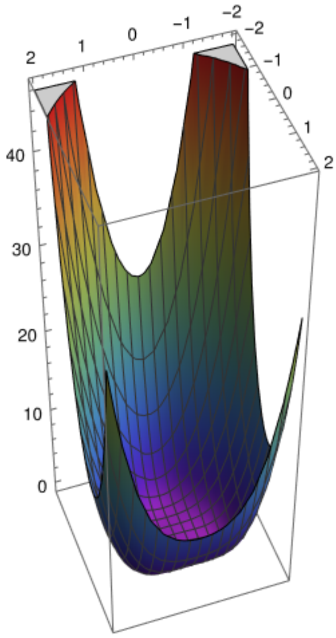
$$\begin{aligned}
y''\left(4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2\right) + y'\left(8xy + 4x^2y' + 12y^2y' - 6x - 6yy'\right) &=\\
-12x^2 - 4y^2 - 8xyy' + 6y + 6xy'&
\end{aligned}$$

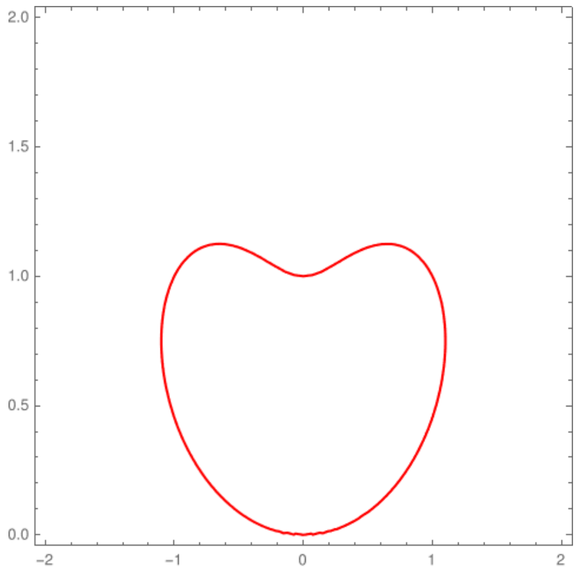
   Dosadíme $x = 0$, $y(x) = 1$ a $y'(x) = 0$.

$$y''(0)(0+4-0-3) + 0(0+0+0-0-0) = -0-4-0+6+0$$

   Tedy

$$y''(0) = 2.$$





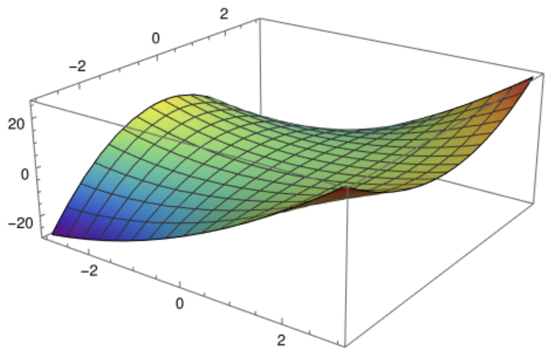
2. Ukažte, že rovnice $x^2 + xy^2 - y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[-2, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první derivaci této funkce v bodě -2.
   Zdroj příkladu: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf
   Řešení: Položme $F = x^2 - y^2 + xy^2 - 1$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 1$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (-2, 1)$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$
   (b) $F(-2, 1) = 4 - 2 - 1 - 1 = 0$
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y + 2xy$, $\frac{\partial F}{\partial y}(-2, 1) = -2 - 4 = -6 \neq 0$.

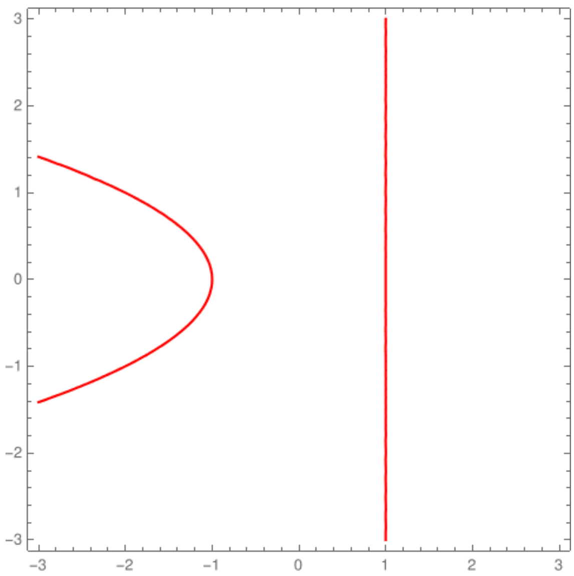
   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.
   Zderivujeme podle x a použijeme vzorec.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(-2, 1) = -4 + 1 = -3.$$

   Pak

$$y'(-2) = -\frac{-3}{-6} = -\frac{3}{6}.$$





3. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$ určuje na okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1.
   Zdroj příkladu: http://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_3.pdf
   Řešení: Položme $F = x^2 + y^2 + xy - 3$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$
   (b) $F(1, 1) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 3 \neq 0$.

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$. Zderivujeme původní rovnici

$$\begin{aligned} 2x + 2yy' + y + xy' &= 0 \\ y'(2y + x) &= -2x - y \\ y' &= \frac{-2x - y}{2y + x} \end{aligned}$$

   Dosadíme bod $[1, 1]$ a získáme

$$y'(1) = -1.$$

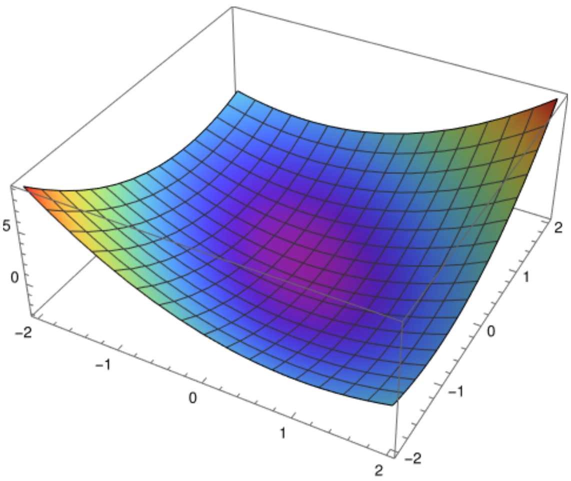
   Pro druhou derivaci zderivujeme ještě jednou

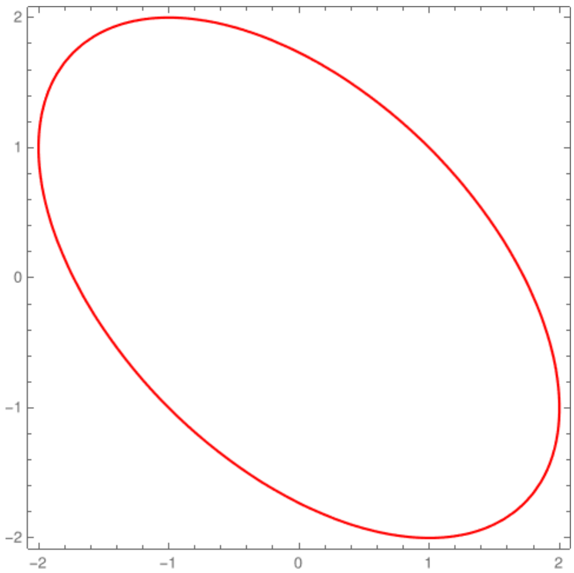
$$\begin{aligned} y''(2y + x) + y'(2y' + 1) &= -2 - y' \\ y'' &= \frac{-y'(2y' + 1) - 2 - y'}{(2y + x)} \\ y'' &= \frac{-2(y')^2 - 2y' - 2}{(2y + x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(2y+x) + y'(2y'+1) &= -2 - y' \\ y'' &= \frac{-y'(2y'+1) - 2 - y'}{(2y+x)} \\ y'' &= \frac{-2(y')^2 - 2y' - 2}{(2y+x)} \end{aligned}$$

Dosadíme $x = 1$, $y = 1$, $y' = -1$:

$$y''(1) = \frac{-2+2-2}{2+1} = -\frac{2}{3}.$$





4. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\pi, \pi]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Najděte rovnici tečny v bodě $[\pi, \pi]$.
   Zdroj příkladu: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf
   Řešení: Položme $F = y - \frac{1}{2}\sin y - x$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 1$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (\pi, \pi)$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
   (b) $F(\pi, \pi) = \pi - 0 - \pi = 0$,
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{1}{2}\cos y$, $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, \pi) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq 0$.
   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y}-\delta, \bar{y}+\delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon))$.
   Zderivujeme podle x a použijeme vzorec.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(\pi, \pi) = -1.$$

Pak

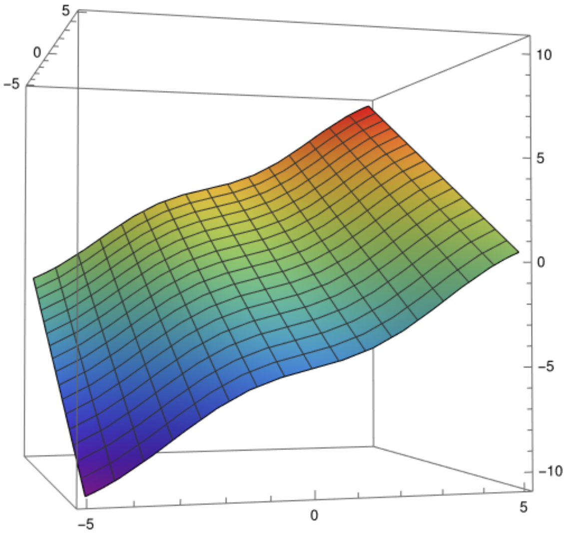
$$y'(\pi) = -\frac{-1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

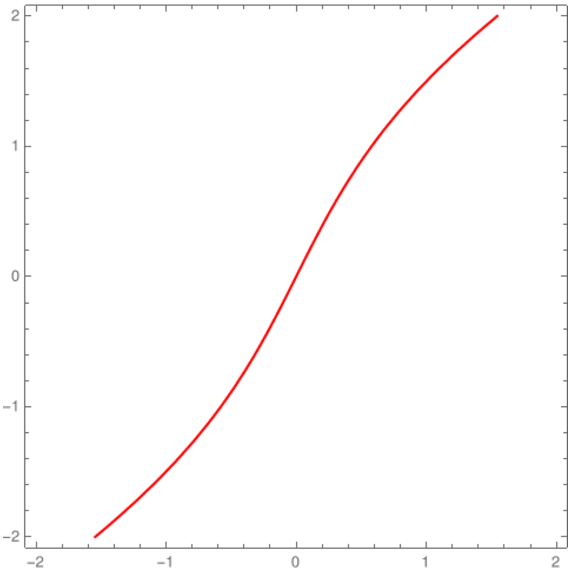
Pro rovnici tečny platí

$$y = \bar{y} + f'(x)(x - \bar{x})$$

Tedy

$$y = \pi + \frac{2}{3}(x - \pi).$$





5. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Určete, zda graf této funkce leží na okolí daného bodu pod tečnou nebo nad tečnou.
   Zdroj příkladu: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf
   Řešení: Položme $F = y - \frac{1}{2}\sin y - x$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$
   (b) $F(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{1}{2}\cos y$, $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$.

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y}-\delta, \bar{y}+\delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.
   Zderivujeme původní rovnici

$$y' - \frac{1}{2}\cos y y' = 1$$

$$y'\left(1 - \frac{1}{2}\cos y\right) = 1$$

$$y' = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}\cos y)}$$

Dosadíme
$$y'\left(\frac{\pi-1}{2}\right)=\frac{1}{1-0}=1$$
Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme
$$y''\left(1-\frac{1}{2}\cos y\right)+y'\left(\frac{1}{2}\sin yy'\right)=0$$
$$y''=-\frac{y'\left(\frac{1}{2}\sin yy'\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\cos y\right)}$$
Dosadíme $x=\frac{\pi-1}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$, $y'=1$:
$$y''=-\frac{\frac{1}{2}}{(1-0)}=-\frac{1}{2}$$
Dohromady máme: funkce y je $\mathcal{C}^2$, tedy y'' je spojitá. Navíc $y''\left(\frac{\pi-1}{2}\right)=-\frac{1}{2}<0$. Odtud máme, že existuje okolí bodu $\bar{x}$ takové, že druhá derivace je na tomto okolí záporná. Funkce je tam tedy konkávní a leží pod tečnou.

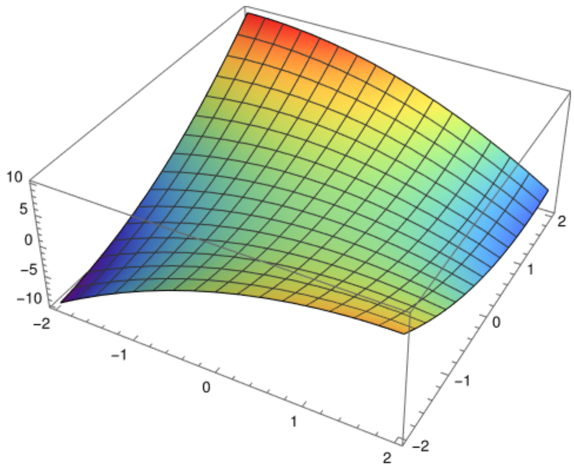
6. K rovnici $-x^2+y^2-2xy+y=0$ najděte body, v nichž jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci a které jsou stacionárními body takto implicitně definovaných funkcí jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lok. extrémy.
Zdroj příkladu: `http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf`
Řešení: Položme $F=-x^2+y^2-2xy+y$, $G=\mathbb{R}^2$, $k=2$. Máme $F\in\mathcal{C}^k(G)$.
Hledáme takové body (x,y), kde
   (a) $F(x,y)=-x^2+y^2-2xy+y=0$
   (b) $\frac{\partial F}{\partial y}=2y-2x+1\neq 0$
   (c) $y'(0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=0$, tedy $\frac{\partial F}{\partial x}=-2x-2y=0$ (stacionární body)

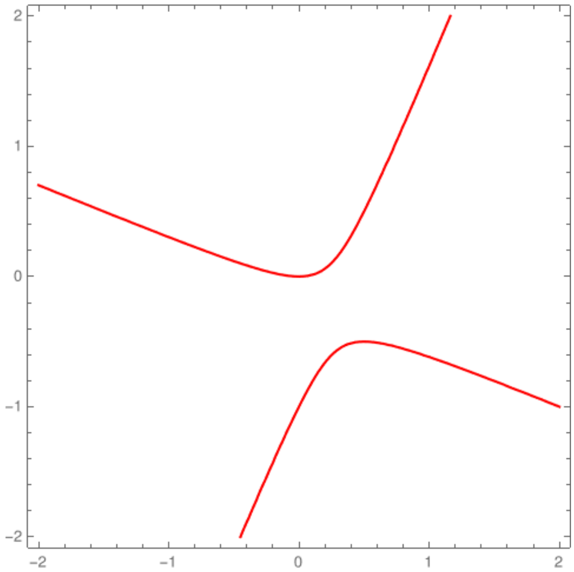
Ze 3. rovnice máme $y=-x$. Dosadíme do první:
$$-x^2+x^2+2x^2-x=0$$
$$x(2x-1)=0.$$
Celkem máme body $(0,0)$ a $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Pro oba je navíc splněna podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$. Tedy jsou v obou bodech splněny podmínky věty o implicitní funkci.
Spočteme dvě derivace.
$$-2x+2yy'-2y-2xy'+y'=0$$
$$y'(2y-2x+1)=2x+2y$$
dále
$$y''(2y-2x+1)+y'(2y'-2)=2+2y'$$
$$y''=\frac{-y'(2y'-2)+2+2y'}{(2y-2x+1)}$$

Dosadíme nalezené body (navíc máme, že $y' = 0$). Tedy

$$y''(0) = \frac{2}{1} > 0.$$
$$y''(\frac{1}{2}) = \frac{2}{-1} < 0.$$

Závěr: v bodě $(0,0)$ je lok. minimum a v bodě $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ je lok. maximum.





7. Ukažte, že rovnice $\ln(x^2z^3) = e^{z\cos y} - 1$ určuje na okolí bodu $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ implicitně zadanou funkci $z(x,y)$. Vypočtěte její parciální derivace 1. řádu a určete jejich hodnotu v daném bodě.
Příklad is řešením máme z http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf
Řešení: Položme $F(x,y,z) = \ln(x^2z^3) - e^{z\cos y} + 1$, $G = (-\infty, 0) \times \mathbb{R} \times (0,\infty)$, $k = 1$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1, \frac{\pi}{2})$, $\bar{z} = 1$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
   (b) $F(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = \log(1) - e^{1\cdot\cos\frac{\pi}{2}} + 1 = 0$,
   (c) $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{3}{z} - e^{z\cos y}\cos y$, $\frac{\partial F}{\partial z}(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = 3 - e^{1\cos\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2} = 3 \neq 0$.

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $(x,y) \in B((\bar{x},\bar{y}),\varepsilon)$ existuje právě jedno $z \in (\bar{z} - \delta, \bar{z} + \delta)$ s vlastností $F(x,y,z) = 0$. Označíme-li toto z symbolem $\varphi(x,y)$, pak $\varphi(x,y) \in \mathcal{C}^1(B((\bar{x},\bar{y}),\varepsilon))$.
   Zderivujeme podle x a y a použijeme vzorec.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = -2.$$

Pak

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

a

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^{z\cos y}z(-\sin y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = 1.$$

Pak
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{3}$$

8. Ukažte, že rovnice $z + e^z = xy + 2$ určuje na okolí bodu $[-1, 1, 0]$ implicitně zadanou funkci $z(x, y)$. Vypočtěte její parciální derivace 1. a 2. řádu v daném bodě.
   Příklad is řešením máme z http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf
   Řešení:
   - Položme $F(x, y, z) = z + e^z - xy - 2$, $G = \mathbb{R}^3$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1, 1)$, $\bar{z} = 0$. Pak
     (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
     (b) $F(-1, 1, 0) = 0 + e^0 + 1 - 2 = 0$,
     (c) $\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + e^z$, $\frac{\partial F}{\partial z}(-1, 1, 0) = 1 + 1 \neq 0$
     Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $(x, y) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$ existuje právě jedno $z \in (\bar{z} - \delta, \bar{z} + \delta)$ s vlastností $F(x, y, z) = 0$. Označíme-li toto z symbolem $\varphi(x, y)$, pak $\varphi(x, y) \in \mathcal{C}^2(B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon))$.
   - Pro zjištění derivací budeme aplikovat řetízkové pravidlo. Uvažujme rovnici
     $$z + e^z = xy + 2,$$
     kde $z = z(x, y)$ je funkce dvou proměnných. Prve derivujeme podle x.
     $$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} + e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= y \\ \frac{\partial z}{\partial x}(1 + e^z) &= y \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{y}{1 + e^z} \end{aligned}$$
     V bodě $(-1, 1, 0)$ máme
     $$\frac{\partial z}{\partial x}(-1, 1, 0) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$
     Analogicky zderivujeme podle y.
     $$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} + e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= x \\ \frac{\partial z}{\partial y}(1 + e^z) &= x \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x}{1 + e^z} \end{aligned}$$
     V bodě $(-1, 1, 0)$ máme
     $$\frac{\partial z}{\partial y}(-1, 1, 0) = \frac{-1}{1 + e^0} = -\frac{1}{2}$$
   - Analogicky postupujeme pro 2. derivace.
     $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y(1 + e^z)^{-2} e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

V bodě $(-1, 1, 0)$ máme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-1,1,0) = -1(1+e^0)^{-2}e^0 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(-1,1,0) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

Dále

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x(1+e^z)^{-2}e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

V bodě $(-1, 1, 0)$ máme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-1,1,0) = 1(1+e^0)^{-2}e^0 \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(-1,1,0) = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

Smíšená derivace:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(1+e^z) - y(e^z)\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+e^z)^2}$$

V bodě $(-1, 1, 0)$ máme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-1,1,0) = \frac{(1+e^0) - 1(e^0)\frac{\partial z}{\partial y}(-1,1,0)}{(1+e^0)^2} = \frac{2+\frac{1}{2}}{4} = \frac{5}{8}$$

Navíc platí

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-1,1,0) = \frac{5}{8},$$

což plyne z věty o záměnnosti parciálních derivací a faktu, že $\varphi \in \mathcal{C}^2(B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon))$.

9. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20$ určuje na okolí bodu $[1, 2, 3]$ implicitně zadanou funkci $z(x, y)$. Najděte rovnici tečné roviny v daném bodě.
   Příklad is řešením máme z http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf
   Řešení: Položme $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 20$, $G = \mathbb{R}^3$, $k = 1$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 2)$, $\bar{z} = 3$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
   (b) $F(1, 2, 3) = 1 + 4 + 9 + 6 - 20 = 0$,
   (c) $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z + xy$ $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 2, 3) = 6 + 2 \neq 0$.

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $(x, y) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$ existuje právě jedno $z \in (\bar{z} - \delta, \bar{z} + \delta)$ s vlastností $F(x, y, z) = 0$. Označíme-li toto z symbolem $\varphi(x, y)$, pak $\varphi(x, y) \in \mathcal{C}^1(B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon))$. Zderivujeme podle x a y a použijeme vzorec.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + yz, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,3) = 2 + 6 = 8.$$

   Pak

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{8}{8} = -1$$

   a

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + xz, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,3) = 4 + 3 = 7.$$

Pak

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{7}{8}.$$

Protože $\varphi(x,y) \in \mathcal{C}^1(B((\bar{x},\bar{y}),\varepsilon))$, tak funkce má derivaci a můžeme sestavit rovnici tečné roviny. Dostáváme

$$\begin{aligned}
z - \bar{z} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})(x-\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})(y-\bar{y}) \\
z - 3 &= -1(x-1) - \frac{7}{8}(y-2) \\
x + \frac{7}{8}y + z &= \frac{23}{4}
\end{aligned}$$

Zkouškové příklady

10. Ukažte, že daná rovnice určeuje na okolí bodu $[\bar{x},\bar{y}]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě $\bar{x}$.

   (a) $x^y + y^x = 2y, [\bar{x},\bar{y}] = [1,1]$
   Řešení: Položme $F = x^y + y^x - 2y$, $G = (0,\infty)\times(0,\infty)$, $k = 2$ a $(\bar{x},\bar{y}) = (1,1)$. Pak

   i. $F \in \mathcal{C}^k(G)$
   ii. $F(1,1) = 1 + 1 - 2 = 0$
   iii. $\frac{\partial F}{\partial y} = x^y \log x + xy^{x-1} - 2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 0 + 1 - 2 = -1 \neq 0$.

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y}-\delta, \bar{y}+\delta)$ s vlastností $F(x,y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon))$.
   Uvažujme původní rovnici

   $$x^y + y^x = 2y$$

   neboli

   $$e^{y\log x} + e^{x \log y} = 2y$$

   Zderivujme obě strany podle x a vyjádřeme y':

   $$\begin{aligned}
   x^y\left(\frac{y}{x} + y'\log x\right) + y^x\left(\log y + \frac{x}{y}y'\right) &= 2y' \\
   y'\left(x^y \log x + y^x\frac{x}{y} - 2\right) &= -x^y\frac{y}{x} - y^x \log y
   \end{aligned}$$

   Dosadíme $(x, y(x)) = (1,1)$ a získáme

   $$\begin{aligned}
   y'(1)(0+1-2) &= -1 - 0 \\
   y'(1) &= 1.
   \end{aligned}$$

   Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici:

   $$y'\left(x^y \log x + y^x\frac{x}{y} - 2\right) = -x^y\frac{y}{x} - y^x \log y$$

Tedy

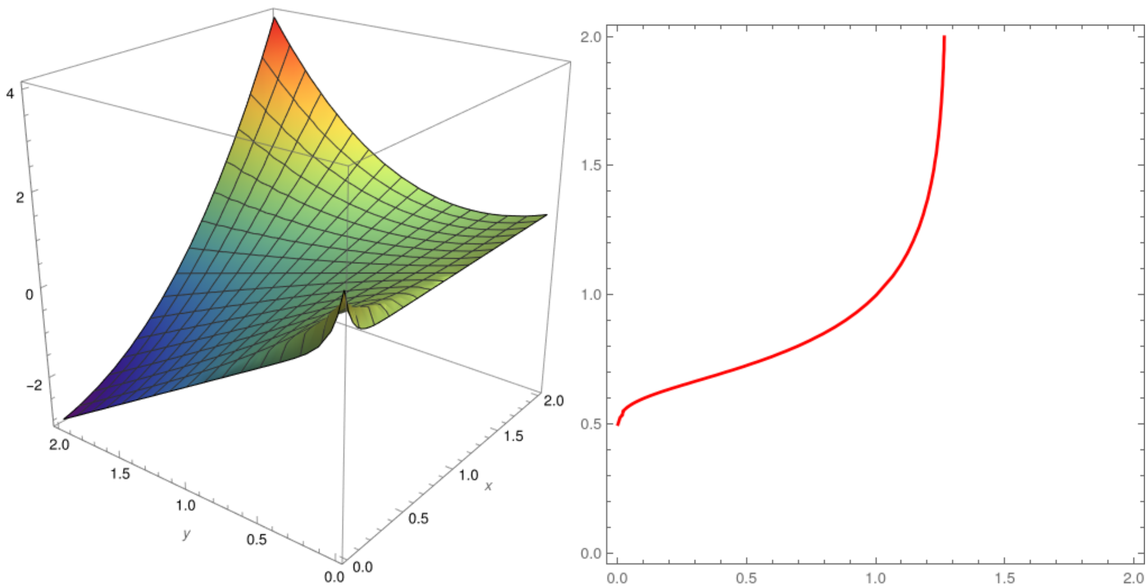
$$\begin{aligned}
&y''\left(x^y\log x + y^x\frac{x}{y} - 2\right)\\
&\qquad + y'\left(x^y\left(\frac{y}{x} + y'\log x\right)\log x + \frac{x^y}{x} + y^x\left(\log y + \frac{x}{y}y'\right)\frac{x}{y} + y^x\frac{y - xy'}{y^2}\right)\\
&= -x^y\left(\frac{y}{x} + y'\log x\right)\frac{y}{x} - x^y\frac{y'x - y}{x^2} - y^x\left(\log y + \frac{x}{y}y'\right)\log y - \frac{y^x}{y}
\end{aligned}$$

Dosadíme $x = 1$, $y(1) = 1$ a $y'(x) = 1$.

$$y''(1)(0+1-2)+1(1(1+0))0+1+1(0+1)\cdot1+1\cdot\frac{1-1}{1} = -1(1+0)\cdot1-1\frac{1-1}{1}-1(0+1)\cdot0-1$$

Tedy

$$\begin{aligned}
-y''(1) + 1 + 1 &= -1 - 1\\
y''(1) &= 4
\end{aligned}$$



(b) $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$
Řešení: Položme $F = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Pak

i. $F \in \mathcal{C}^k(G)$
ii. $F(0,0) = 1 + 1 - 2 = 0$
iii. $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{\sin xy}(\cos xy)x - 2$ $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 = -2 \neq 0.$

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.
Uvažujme původní rovnici

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

Zderivujme obě strany podle x a vyjádřeme y':

$$e^{\sin x^2} \cos(x^2)2x + e^{\sin xy} \cos(xy)(y + xy') = 2y'$$

Dosadíme $(x, y(x)) = (0, 0)$ a získáme

$$e^0 \cos(0) \cdot 0 + e^0 \cos 0(0 + 0) = 2y'(0)y'(0) = 0.$$

Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici:

$$e^{\sin x^2} \cos(x^2)2x + e^{\sin xy} \cos(xy)(y + xy') = 2y'$$

Tedy

$$\begin{aligned} &e^{\sin x^2}(\cos(x^2)2x)^2 + e^{\sin x^2}(-\sin(x^2)4x^2 + \cos(x^2) \cdot 2) \\ &\quad + e^{\sin xy}(\cos(xy)(y + xy'))^2 + e^{\sin xy}(-\sin(xy)(y + xy')^2 + \cos(xy)(y' + y' + xy'')) = 2y'' \end{aligned}$$

Dosadíme $x = 0$, $y(0) = 0$ a $y'(x) = 0$.

$$2+ = 2y''$$

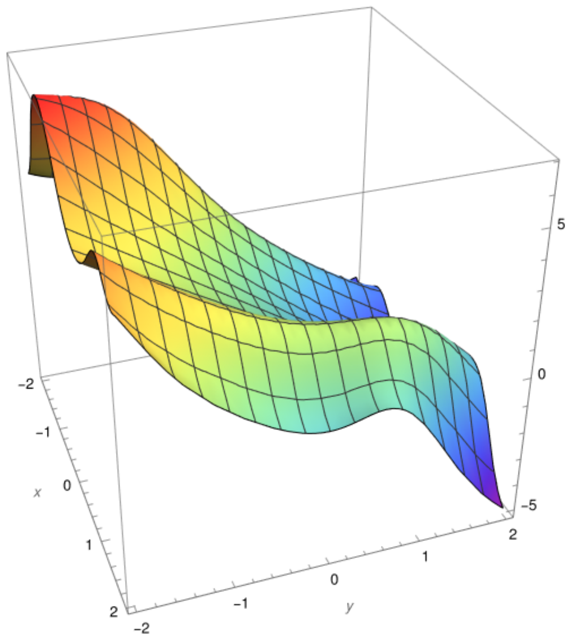
Tedy

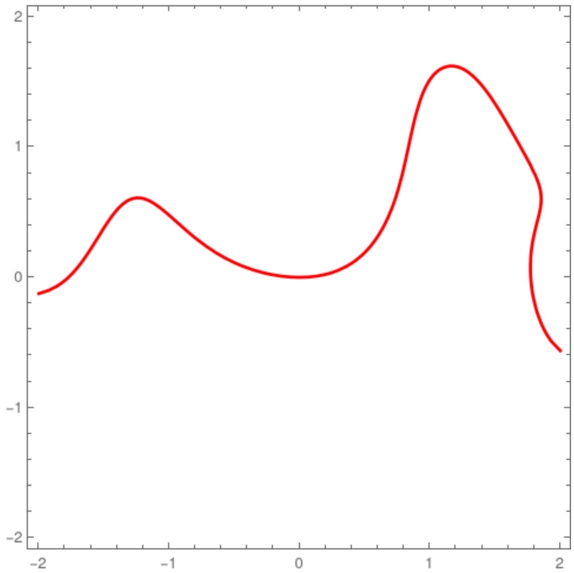
$$y''(0) = 1$$

(c) $\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2), [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$
Řešení: Položme $F = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2)$, $G = (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (lze vykoukat z obrázku) , $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$.
Pak

i. $F \in \mathcal{C}^k(G)$
ii. $F(0,0) = \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} = 0$
iii. $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-(y+x^2)^2}}$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 + 0 = 1 \neq 0.$

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.





Uvažujme původní rovnici

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

Zderivujme obě strany podle x a vyjádřeme y':

$$\frac{1 + 2yy'}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} = -\frac{y' + 2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}$$

Dosadíme $(x, y(x)) = (0, 0)$ a získáme

$$1 = -y'(0)$$
$$-1 = y'(0)$$

Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici:

$$\frac{1 + 2yy'}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} = -\frac{y' + 2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}$$

Tedy

$$(2y'y' + 2yy'')(1 - (x + y^2)^2)^{-\frac{1}{2}} + (1 + 2yy') \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (1 - (x + y^2))^{-\frac{3}{2}} (-2(x + y^2)(1 + 2yy'))$$

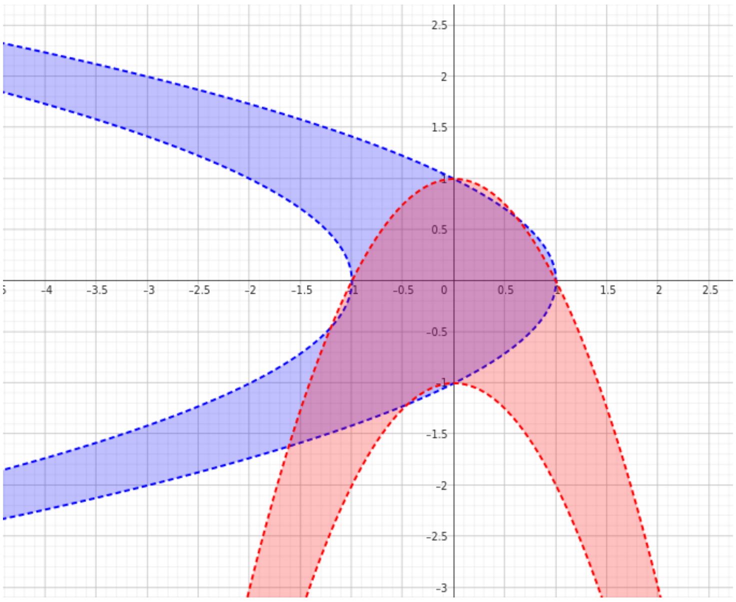
$$= -(y'' + 2)(1 - (y + x^2)^2)^{-\frac{1}{2}} - (y' + 2x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (1 - (y + x^2))^{-\frac{3}{2}} (-2(y + x^2)(y' + 2x))$$

Dosadíme $x = 0$, $y(0) = 0$ a $y'(0) = -1$.

$$2 = -(y'' + 2)$$

Tedy

$$y''(0) = -4$$



(d) $\arctan(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y$, $[\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$
Řešení: Položme $F = \arctan(y^2 + xy) - e^{xy} + \cos x - y$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Pak

i. $F \in \mathcal{C}^k(G)$
ii. $F(0, 0) = 0 - 1 + 1 - 0 = 0$
iii. $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y+x}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}x - 1$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0 - 0 - 1 = -1 \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.
Uvažujme původní rovnici

$$\arctan(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y$$

Zderivujme obě strany podle x a vyjádřeme y':

$$\frac{2yy' + y + xy'}{1 + (y^2 + xy)^2} = e^{xy}(y + xy') + \sin x + y'$$

Dosadíme $(x, y(x)) = (0, 0)$ a získáme

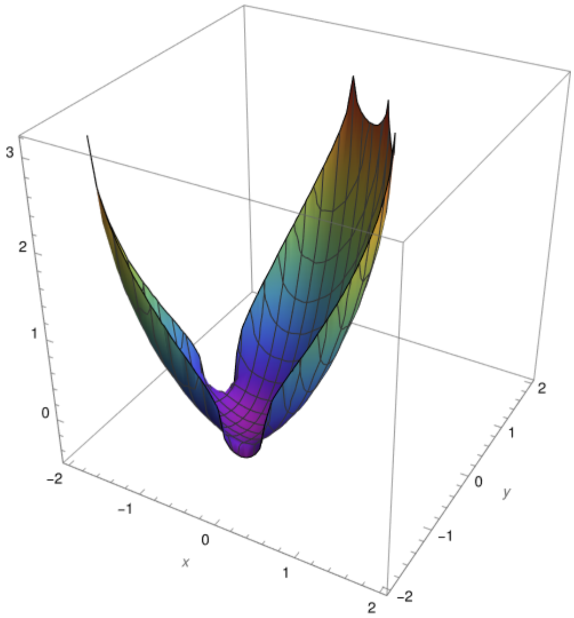
$$0 = y'(0)$$

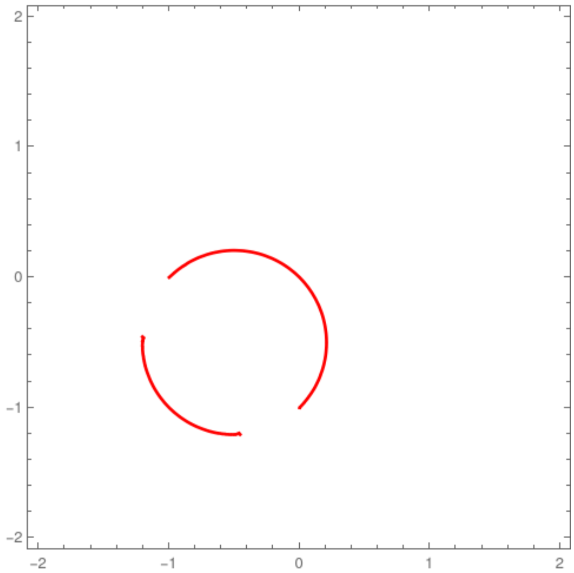
Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici:

$$\frac{2yy' + y + xy'}{1 + (y^2 + xy)^2} = e^{xy}(y + xy') + \sin x + y'$$

Tedy

$$\frac{(2y'y' + 2yy'' + y' + y' + xy'')(1 + (y^2 + xy)^2) - (2yy' + y + xy')(2(y^2 + xy)(2yy' + y + xy'))}{(1 + (y^2 + xy)^2)^2}$$
$$= e^{xy}(y + xy')^2 + e^{xy}(y' + y' + xy'') + \cos x + y''$$



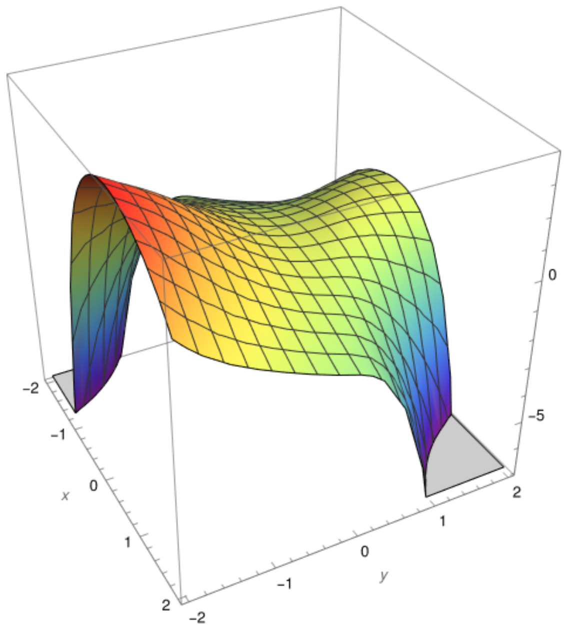


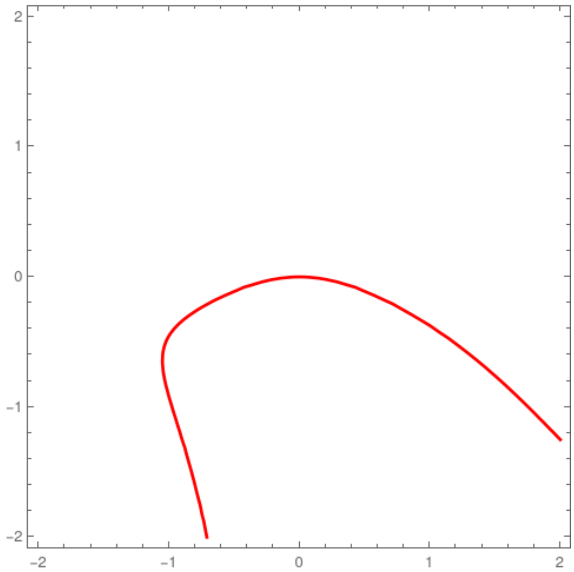
Dosadíme $x = 0$, $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$.

$$0 = 1 + y''$$

Tedy

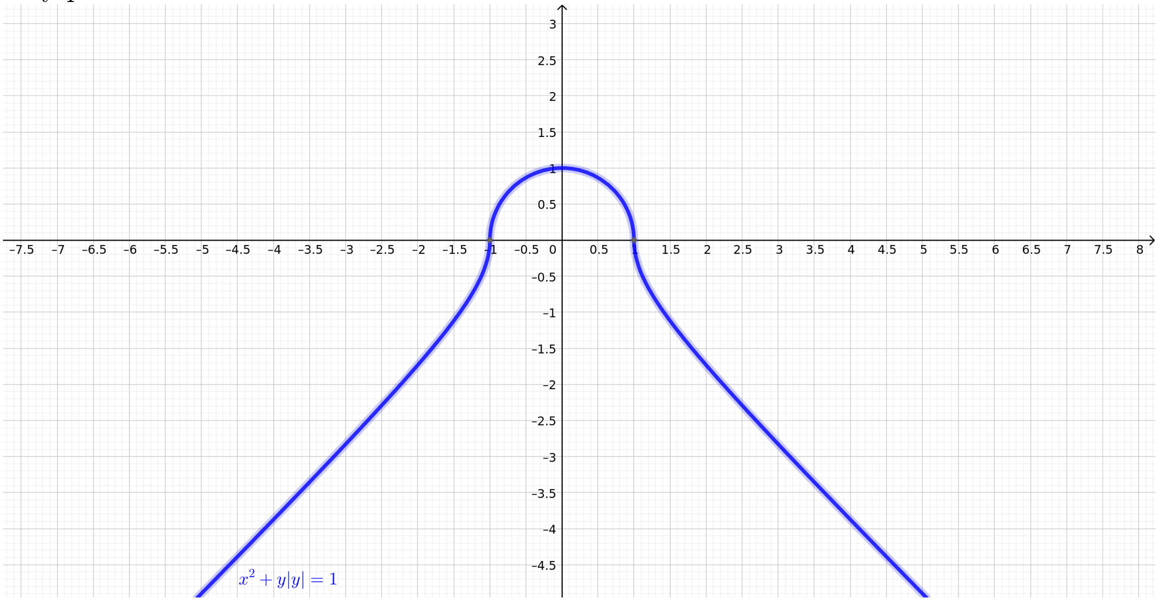
$$y''(0) = -1$$





Teorie

11. Rozhodněte, zda je podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ ve větě o implicitní funkci nutná. Dokážete sestrojit funkci (alespoň obrázkem), u níž platí všechny předpoklady až na tento, a přesto platí závěr?
Řešení: Např. funkci $y = \sqrt[3]{x}$ lze nanpsat i jako implicitní funkci k rovnici $y^3 = x$. Pak v bodě $(0, 0)$ není splněna podmínka nenulové derivace, přesto jde zjevně o funkci.
Jiný příklad na obrázku



12. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která je parciálně spojitá, ale není spojitá.
Řekneme, že f je parciálně spojitá, pokud pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ je funkce $g(y) = f(x_0, y)$ spojitá na $\mathbb{R}$ (jakožto funkce 1 proměnné), a pro každé $y_0 \in \mathbb{R}$ je funkce $h(x) = f(x, y_0)$ spojitá na $\mathbb{R}$.
Řešení: Položme
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Pak na $\mathbb{R}^2 \setminus [0,0]$ je f spojitá - podle aritmetiky a spojitosti.
V počátku platí: $f(0, y) = 0$ a $f(x, 0) = 0$, tedy je parciálně spojitá.
Ale pro $f(x, x) = \frac{xx}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$, tedy f jako taková spojitá není.

13. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v bodě $[0, 0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0, 0)$, ale není v bodě $[0, 0]$ spojitá.
Řešení: Položme
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Derivace v počátku ve směru $v = (v_1, v_2)$ spočteme z definice
$$D_v(f) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{tv_1(tv_2)^2}{(tv_1)^2+(tv_2)^4}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Ale $f(x^2, x) = \frac{1}{2}$, tedy f není v $[0, 0]$ spojitá.

Jiný příklad: Nechť $f(x,y) = 1$, jestliže $y = x^2$, kde $x \neq 0$, v ostatních případech nechť je $f(x,y) = 0$.
Pak funkce je v počátku nespojitá, ale všechny směrové derivace existují a jsou 0.

14. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v bodě $[0,0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0,0)$, ale neexistuje totální diferenciál $Df([0,0])$.
Řešení: Jako předchozí příklad. Není-li totiž f spojitá, nemůže mít totální diferenciál.

15. Jsou dány vztahy
$$e^{u/x}\cos(v/y) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$
$$e^{u/x}\sin(v/y) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$
Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu $[1,1,0,\frac{\pi}{4}]$ funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$ třídy C^∞. Spočtěte parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial x}$.
Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

- Uvažujme $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$, $F : (F_1, F_2)$, kde
$$F_1(x,y,u,v) = e^{u/x}\cos(v/y) - \frac{x}{\sqrt{2}}$$
$$F_2(x,y,u,v) = e^{u/x}\sin(v/y) - \frac{y}{\sqrt{2}}$$
Pak $F \in \mathcal{C}^\infty\big((0,\infty) \times (0,\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\big)$.
Dále $F(1,1,0,\frac{\pi}{4}) = [0,0]$.
Sestavme matici:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x}e^{u/x}\cos(v/y) & -\frac{1}{y}e^{u/x}\sin(v/y) \\ \frac{1}{x}e^{u/x}\sin(v/y) & \frac{1}{y}e^{u/x}\cos(v/y) \end{pmatrix}$$
V bodě $(1,1,0,\frac{\pi}{4})$ dostáváme determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$
Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(1,1)$ a okolí V bodu $(0,\frac{\pi}{4})$ takové, že pro každé $(x,y) \in U$ existuje právě jedno $(u,v) = \varphi(x,y) \in V$ splňující $F(x,y,u,v) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x,y)$ a $v(x,y)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.
- Zderivujme podle proměnné x rovnice :
$$e^{u/x}\cos(v/y) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$
$$e^{u/x}\sin(v/y) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Dostáváme

$$e^{u/x}\frac{u_x x - u}{x^2}\cos(v/y) + e^{u/x}(-\sin(v/y))\frac{1}{y}v_x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$
$$e^{u/x}\frac{u_x x - u}{x^2}\sin(v/y) + e^{u/x}\cos(v/y)\frac{1}{y}v_x = 0$$

Dosadíme $x = 1$, $y = 1$, $u(1,1) = 0$, $v(1,1) = \frac{\pi}{4}$. Máme

$$u_x(1,1)\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}v_x(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$u_x(1,1)\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}v_x(1,1) = 0.$$

Odtud

$$u_x(1,1) = \frac{1}{2},$$
$$v_x(1,1) = -\frac{1}{2}.$$

16. Ukažte, že existují funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$ definované na nějakém okolí U bodu $[1,2]$, které jsou na U třídy C^1, splňují $u(1,2) = 0$, $v(1,2) = 0$ a platí pro ně rovnice

$$xe^{u+v} + 2uv = 1$$
$$ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$

Spočtěte $u'(1,2)$ a $v'(1,2)$.
Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

- Uvažujme $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$, $F : (F_1, F_2)$, kde

$$F_1(x,y,u,v) = xe^{u+v} + 2uv - 1$$
$$F_2(x,y,u,v) = ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x.$$

Pak $F \in \mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (-1,\infty)\big)$.
Dále $F(1,2,0,0) = [0,0]$.
Sestavme matici:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{pmatrix}$$

V bodě $(1,2,0,0)$ dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(1,2)$ a okolí V bodu $(0,0)$ takové, že pro každé $(x,y) \in U$ existuje právě jedno $(u,v) = \varphi(x,y) \in V$ splňující $F(x,y,u,v) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x,y)$ a $v(x,y)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.

- Zderivujme podle proměnné x rovnice :
$$xe^{u+v} + 2uv = 1$$
$$ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$
Dostáváme
$$e^{u+v} + xe^{u+v}(u_x + v_x) + 2u_x v + 2uv_x = 0$$
$$yu^{u-v}(u_x - v_x) - \frac{1}{(1+v)^2}(u_x(1+v) - uv_x) = 2$$
Dosadíme $x = 1$, $y = 2$, $u(1,2) = 0$, $v(1,2) = 0$. Máme
$$u_x + v_x = -1$$
$$u_x - 2v_x = 2$$
Odtud
$$u_x(1,2) = 0,$$
$$v_x(1,2) = -1.$$
- Zderivujme podle proměnné y rovnice :
$$xe^{u+v} + 2uv = 1$$
$$ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$
Dostáváme
$$xe^{u+v}(u_y + v_y) + 2u_y v + 2uv_y = 0$$
$$e^{u-v} + yu^{u-v}(u_y - v_y) - \frac{1}{(1+v)^2}(u_y(1+v) - uv_y) = 0$$
Dosadíme $x = 1$, $y = 2$, $u(1,2) = 0$, $v(1,2) = 0$. Máme
$$u_y + v_y = 0$$
$$u_y - 2v_y = -1$$
Odtud
$$u_y(1,2) = -\frac{1}{3},$$
$$v_y(1,2) = \frac{1}{3}.$$
- Tedy $u'(1,2) = (0, -\frac{1}{3})$, $v'(1,2) = (-1, \frac{1}{3})$.

17. Dokažte, že existují funkce $z(x,y)$ a $t(x,y)$, které jsou třídy C^∞ na nějakém okolí U obsahujícím $[1,-1]$ a splňují rovnice
$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0$$
$$x + y + z - t - 2 = 0,$$
spolu se vztahy $z(1,-1) = 2$ a $t(1,-1) = 0$.
Spočtěte $z''(1,-1)$.
Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

- Uvažujme $F:\mathbb{R}^{2+2}\to\mathbb{R}^2$, $F:(F_1,F_2)$, kde

$$F_1(x,y,z,t)=x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2-t^3$$
$$F_2(x,y,z,t)=x+y+z-t-2,$$

Pak $F\in\mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R}^4\big)$.
Dále $F(1,-1,2,0)=[0,0]$.
Sestavme matici:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial t}\\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z & -3t^2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

V bodě $(1,-1,2,0)$ dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(1,-1)$ a okolí V bodu $(2,0)$ takové, že pro každé $(x,y)\in U$ existuje právě jedno $(z,t)=\varphi(x,y)\in V$ splňující $F(x,y,z,t)=0$. Označíme-li složky φ jako $z(x,y)$ a $t(x,y)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.

- Zderivujme podle proměnné x rovnice :

$$x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2-t^3=0$$
$$x+y+z-t-2=0,$$

Dostáváme

$$2x-zz_x-3t^2t_x=0$$
$$1+z_x-t_x=0$$

Dosadíme $x=1$, $y=-1$, $z(1,-1)=2$, $t(1,-1)=0$. Máme

$$-2z_x=-2$$
$$z_x-t_x=-1$$

Odtud

$$z_x(1,-1)=1,$$
$$t_x(1,-1)=2.$$

- Zderivujme podle proměnné y rovnice :

$$x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2-t^3=0$$
$$x+y+z-t-2=0,$$

Dostáváme

$$2y-zz_y-3t^2t_y=0$$
$$1+z_y-t_y=0$$

Dosadíme $x = 1$, $y = -1$, $z(1, -1) = 2$, $t(1, -1) = 0$. Máme

$$\begin{aligned} -2z_y &= 2 \\ z_y - t_y &= -1 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} z_y(1, -1) &= -1, \\ t_y(1, -1) &= 0. \end{aligned}$$

- Rovnice zderivujeme ještě jednou. Dostáváme

$$\begin{aligned} 2 - (z_x)^2 - zz_{xx} - 6t(t_x)^2 - 3t^2 t_{xx} &= 0, \\ z_{xx} - t_{xx} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - (z_y)^2 - zz_{yy} - 6t(t_y)^2 - 3t^2 t_{yy} &= 0, \\ z_{yy} - t_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -z_y z_x - zz_{xy} - 6tt_y t_x - 3t^2 t_{xy} &= 0 \\ z_{xy} - t_{xy} &= 0, \end{aligned}$$

Dosadíme a získáme

$$\begin{aligned} z_{xx}(1, -1) &= \frac{1}{2} \\ z_{yy}(1, -1) &= \frac{1}{2} \\ z_{xy}(1, -1) &= \frac{1}{2} \\ t_{xx}(1, -1) &= \frac{1}{2} \\ t_{yy}(1, -1) &= \frac{1}{2} \\ t_{xy}(1, -1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Závěr:

$$z''(1, -1)(h_1, h_2) = \frac{1}{2}h_1^2 + h_1 h_2 + \frac{1}{2}h_2^2$$

18. Ukažte, že rovnice

$$\begin{aligned} x &= u + v^2 \\ y &= u^2 - v^3 \end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu $[3, 3]$ funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$ třídy C^∞, které splňují $u(3, 3) = 2$, $v(3, 3) = 1$. Spočtěte $z_{xy}(3, 3)$, pokud $z = 2uv$.
Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

- Uvažujme $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$, $F : (F_1, F_2)$, kde

$$\begin{aligned} F_1(x, y, u, v) &= x = u + v^2 \\ F_2(x, y, u, v) &= y = u^2 - v^3 \end{aligned}$$

Pak $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$.
Dále $F(3,3,2,1) = [0,0]$.
Sestavme matici:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2v \\ -2u & 3v^2 \end{pmatrix}$$

V bodě $(3,3,2,1)$ dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(3,3)$ a okolí V bodu $(2,1)$ takové, že pro každé $(x,y) \in U$ existuje právě jedno $(u,v) = \varphi(x,y) \in V$ splňující $F(x,y,u,v) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x,y)$ a $v(x,y)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.

- Platí

$$z_{xy} = 2(u_{xy}v + u_x v_y + u_y v_x + u v_{xy})$$

Odtud plyne, které derivace funkcí u a v potřebujeme dopočítat.

- Zderivujme podle proměnné x rovnice :

$$\begin{aligned} x &= u + v^2 \\ y &= u^2 - v^3 \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} u_x + 2vv_x &= 1 \\ 2uu_x - 3v^2 v_x &= 0 \end{aligned}$$

- Zderivujme podle proměnné y:

$$\begin{aligned} u_y + 2vv_y &= 0 \\ 2uu_y - 3v^2 v_y &= 1 \end{aligned}$$

Dosadíme $x = 3$, $y = 3$, $u(3,3) = 2$, $v(3,3) = 1$. Máme
Odtud

$$\begin{aligned} u_x(3,3) &= \frac{3}{11}, \\ v_x(3,3) &= \frac{4}{11}, \\ u_y(3,3) &= \frac{2}{11}, \\ v_y(3,3) &= \frac{-1}{11}, \end{aligned}$$

- Ještě jednou zderivujme:

$$\begin{aligned} u_{xy} + 2v_x v_y + 2vv_{yx} &= 0 \\ 2u_x u_y + 2uu_{yx} - 6vv_x v_y - 3v^2 v_{yx} &= 0 \end{aligned}$$

Po dosazení vyjde

$$u_{yx}(3,3) = \frac{224}{11^3},$$
$$v_{yx}(3,3) = -\frac{68}{11^3}.$$

- Ze záměnnosti parciálních derivací můžeme dosadit a získáme

$$z_{xy}(3,3) = \frac{26}{11}$$

19. Spočtěte x_v, y_v a z_v, pokud

$$u = x^2 + y^2,$$
$$v = x^2 - 2xy^2,$$
$$z = \ln(y^2 - x^2)$$

v bodě $u = 5$, $v = -7$, $x(5,-7) = 1$ a $y(5,-7) = 2$.
(Rada: Prve řešte první dvě rovnice pomocí Věty o implicitních funkcích, z_v pak vyjádřete řetízkovým pravidlem.)
Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/

- Budeme prve pracovat jen s prvními dvěma rovnicemi.
Uvažujme $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$, $F : (F_1, F_2)$, kde

$$F_1(x,y,u,v) = u - x^2 - y^2,$$
$$F_2(x,y,u,v) = v - x^2 + 2xy^2,$$

Pak $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$.
Dále $F(1,2,5,-7) = [0,0]$.
Sestavme matici (pozor, derivujeme podle x a y):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ -2x + 2y^2 & 4xy \end{pmatrix}$$

V bodě $(1,2,5,-7)$ dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(5,-7)$ a okolí V bodu $(1,2)$ takové, že pro každé $(u,v) \in U$ existuje právě jedno $(x,y) = \varphi(u,v) \in V$ splňující $F(x,y,u,v) = 0$. Označíme-li složky φ jako $x(u,v)$ a $y(u,v)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.

- Zderivujme podle proměnné v rovnice :

$$u = x^2 + y^2,$$
$$v = x^2 - 2xy^2,$$

Dostáváme

$$2xx_v + 2yy_v = 0$$
$$2xx_v - 2x_v y^2 - 4xyy_v = 1$$

Dosadíme $u = 5$, $v = -7$, $x(5, -7) = 1$, $y(5, -7) = 2$. Máme

$$2x_v + 4y_v = 0$$
$$-6x_v - 8y_v = 1$$

Odtud

$$x_v(5, -7) = -\frac{1}{2}$$
$$y_v(5, -7) = \frac{1}{4}$$

- Derivaci funkce z získáme z řetízkového pravidla (protože funkce y a x jsou $\mathcal{C}^\infty$, tak jsou splněny podmínky řetízkového pravidla). Máme

$$z = \ln(y^2 - x^2)$$

Tedy

$$z_v = \frac{-2x}{y^2 - x^2} x_v + \frac{2y}{y^2 - x^2} y_v$$

Po dosazení

$$z_v(5, -7) = \frac{2}{3}$$

Zkouškové příklady

20. Ukažte, že vztahy

$$u = \ln(xy) + \cos v$$
$$v = e^{x-u} - y^2 - v$$

definují na jistém okolí bodu $[x, y, u, v] = [1, 1, 1, 0]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(1, 0) = 1$ a $y(1, 0) = 1$. Rozhodněte, zda existuje totální diferenciál funkce $y(u, v)$ v bodě $[1, 0]$ a pokud ano, nalezněte jej.
Řešení:

- Uvažujme $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$, $F : (F_1, F_2)$, kde

$$F_1(x, y, u, v) = \ln(xy) + \cos v - u$$
$$F_2(x, y, u, v) = e^{x-u} - y^2 - 2v$$

Pak $F \in \mathcal{C}^\infty\big((0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\big)$.
Dále $F(1, 1, 1, 0) = [0, 0]$.
Sestavme matici (pozor, derivujeme podle x a y):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ e^{x-u} & -2y \end{pmatrix}$$

V bodě $(1,1,1,0)$ dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(1,0)$ a okolí V bodu $(1,1)$ takové, že pro každé $(u,v) \in U$ existuje právě jedno $(x,y) = \varphi(u,v) \in V$ splňující $F(x,y,u,v) = 0$. Označíme-li složky φ jako $x(u,v)$ a $y(u,v)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.

- Zderivujme podle proměnné v rovnice :

$$\begin{aligned} u &= \ln(xy) + \cos v \\ v &= e^{x-u} - y^2 - v \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{xy}(x_v y + y_v x) - \sin v = 0 \\ e^{x-u}(x_v - 0) - 2yy_v - 1 = 1 \end{aligned}$$

Dosadíme $u = 1$, $v = 0$, $x(1,0) = 1$, $y(1,0) = 1$. Máme

$$\begin{aligned} x_v + y_v &= 0 \\ x_v - 2y_v - 1 &= 1 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} x_v(1,1) &= \frac{2}{3} \\ y_v(1,1) &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

- Zderivujme podle proměnné u rovnice :

$$\begin{aligned} u &= \ln(xy) + \cos v \\ v &= e^{x-u} - y^2 - v \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{xy}(x_u y + y_u x) = 1 \\ e^{x-u}(x_u - 1) - 2yy_u = 0 \end{aligned}$$

Dosadíme $u = 1$, $v = 0$, $x(1,0) = 1$, $y(1,0) = 1$. Máme

$$\begin{aligned} x_u + y_u &= 1 \\ x_u - 1 - 2y_u &= 0 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} x_u(1,1) &= 1 \\ y_u(1,1) &= 0 \end{aligned}$$

- Z věty o implicitních funkcích máme, že $y(u,v)$ je třídy C^∞ - tedy má spojité 1. parciální derivace a tedy má totální diferenciál tvaru:

$$y'(1,1)(h_1,h_2) = 0 \cdot h_1 - \frac{2}{3}h_2.$$

21. Ukažte, že vztahy

$$u = \ln(x^2 + y^2) - 2xy$$
$$v = e^x \sin y + \frac{1}{x^2}$$

definují na jistém okolí bodu $[x, y, u, v] = [1, 0, 0, 1]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(0, 1) = 1$ a $y(0, 1) = 0$. Nechť navíc je z funkce proměnných x a y definovaná na okolí bodu $[x, y] = [1, 0]$ předpisem $z(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ a nechť Φ je funkce proměnných u a v definovaná na okolí bodu $[u, v] = [0, 1]$ předpisem $\Phi(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$. Spočtěte $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(0, 1)$.

Řešení:

- Uvažujme $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$, $F : (F_1, F_2)$, kde

$$F_1(x, y, u, v) = \ln(x^2 + y^2) - 2xy - u$$
$$F_2(x, y, u, v) = e^x \sin y + \frac{1}{x^2} - v$$

  Pak $F \in \mathcal{C}^\infty(B_{\frac{1}{2}}(1, 0, 0, 1))$.
  Dále $F(1, 0, 0, 1) = [0, 0]$.
  Sestavme matici (pozor, derivujeme podle x a y):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} - 2y & \frac{2y}{x^2+y^2} - 2x \\ e^x \sin y - \frac{2}{x^3} & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

  V bodě $(1, 0, 0, 1)$ dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & e \end{vmatrix} = 2e + 4 \neq 0.$$

  Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(0, 1)$ a okolí V bodu $(1, 0)$ takové, že pro každé $(u, v) \in U$ existuje právě jedno $(x, y) = \varphi(u, v) \in V$ splňující $F(x, y, u, v) = 0$. Označíme-li složky φ jako $x(u, v)$ a $y(u, v)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.

- Zderivujme podle proměnné u rovnice :

$$u = \ln(xy) + \cos v$$
$$v = e^{x-u} - y^2 - v$$

  Dostáváme

$$\frac{1}{x^2 + y^2}(2xx_u + 2yy_u) - 2x_u y - 2xy_u = 1$$
$$e^x x_u \sin y + e^x \cos y y_u + \frac{-2}{x^3} x_u = 0$$

  Dosadíme $u = 0$, $v = 1$, $x(0, 1) = 1$, $y(0, 1) = 0$. Máme

$$2x_u - 2y_u = 1$$
$$ey_u - 2x_u = 0$$

Odtud

$$x_u(0,1) = \frac{e}{2e-4}$$
$$y_u(0,1) = \frac{1}{e-2}$$

- Derivaci funkce Φ dopočteme z řetízkového pravidla (protože funkce x a y jsou $\mathcal{C}^\infty$, tak jsou splněny podmínky řetízkového pravidla).

$$\Phi_u = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} y \cdot \frac{-1}{x^2} x_u + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} y_u$$

Po dosazení máme

$$\Phi_u(0,1) = \frac{1}{e-2}$$

22. Nechť $T : (C([0,1]), \rho_{\sup}) \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované jako $T(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Ukažte, že T je spojité.

Řešení: Zvolme funkci $f_0 \in C([0,1])$. Zobrazení T je pak spojité v bodě f_0, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in C([0,1]),\ \rho_{\sup}(f, f_0) < \delta : |T(f) - T(f_0)| < \varepsilon,$$

kde

$$|T(f) - T(f_0)| = \left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_0^1 (f(x) - f_0(x))\,\mathrm{d}x \right|$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Zvolme f takovou, že $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_0(x)| < \delta$.
Pak máme

$$|T(f) - T(f_0)| = \left| \int_0^1 (f(x) - f_0(x))\,\mathrm{d}x \right| \le \int_0^1 |f(x) - f_0(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \delta\,\mathrm{d}x = \delta < \varepsilon.$$

Tedy T je spojité v f_0.