



7. cvičení – Implicitní funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Implicitní funkce

Teorie

Věta 1. Necht' $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}$, $[\bar{x}, \bar{y}] \in G$ a necht' platí:

1. $F \in \mathcal{C}^k(G)$
2. $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\bar{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\bar{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Píšeme-li $y = \varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

kde $j \in \{1, \dots, n\}$, $x \in U$.

Příklady

1. Ukažte, že rovnice $(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$ určuje na okolí bodu $[0, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočítejte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.
2. Ukažte, že rovnice $x^2 + xy^2 - y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[-2, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočítejte první derivaci této funkce v bodě -2 .
3. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$ určuje na okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočítejte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1.
4. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2} \sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\pi, \pi]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Najděte rovnici tečny v bodě $[\pi, \pi]$.
5. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2} \sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Určete, zda graf této funkce leží na okolí daného bodu pod tečnou nebo nad tečnou.
6. K rovnici $-x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$ najděte body, v nichž jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci a které jsou stacionárními body takto implicitně definovaných funkcí jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lok. extrém.
7. Ukažte, že rovnice $\ln(x^2 z^3) = e^{z \cos y} - 1$ určuje na okolí bodu $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ implicitně zadanou funkci $z(x, y)$. Vypočítejte její parciální derivace 1. řádu a určete jejich hodnotu v daném bodě.
8. Ukažte, že rovnice $z + e^z = xy + 2$ určuje na okolí bodu $[-1, 1, 0]$ implicitně zadanou funkci $z(x, y)$. Vypočítejte její parciální derivace 1. a 2. řádu v daném bodě.
9. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20$ určuje na okolí bodu $[1, 2, 3]$ implicitně zadanou funkci $z(x, y)$. Najděte rovnici tečné roviny v daném bodě.

Zkouškové příklady

10. Ukažte, že daná rovnice určuje na okolí bodu $[\bar{x}, \bar{y}]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě $\bar{x}$.
- (a) $x^y + y^x = 2y, [\bar{x}, \bar{y}] = [1, 1]$
 - (b) $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$
 - (c) $\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2), [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$
 - (d) $\arctan(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

Teorie

11. Rozhodněte, zda je podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ ve větě o implicitní funkci nutná. Dokážete sestrojit funkci (alespoň obrázkem), u níž platí všechny předpoklady až na tento, a přesto platí závěr?
12. ✿ Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, která je parciálně spojitá, ale není spojitá. Řekneme, že f je parciálně spojitá, pokud pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ je funkce $g(y) = f(x_0, y)$ spojitá na $\mathbb{R}$ (jakožto funkce 1 proměnné), a pro každé $y_0 \in \mathbb{R}$ je funkce $h(x) = f(x, y_0)$ spojitá na $\mathbb{R}$.
13. ♥ Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, která má v bodě $[0, 0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0, 0)$, ale není v bodě $[0, 0]$ spojitá.
14. ✱ Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, která má v bodě $[0, 0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0, 0)$, ale neexistuje totální diferenciál $Df([0, 0])$.

$$\begin{aligned} 0 &= (0'0)f' \cdot \frac{f'' + \varepsilon^x}{\varepsilon^{\bar{n}x}} \quad (\varepsilon 1) \\ 0 &= (0'0)f' \cdot \frac{f'' + \varepsilon^x}{\varepsilon^{\bar{n}x}} \quad (\varepsilon 1) \\ 0 &= (0'0)f' \cdot \frac{f'' + \varepsilon^x}{\varepsilon^{\bar{n}x}} \quad (\varepsilon 1) \end{aligned}$$

2 Více implicitních funkcí

Teorie

Věta 2. Necht $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Necht $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}$, $[\bar{x}, \bar{y}] \in G$ a necht platí:

1. $F \in C^k(G)$
2. $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$
- 3.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \\ & \ddots & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí bodu $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\bar{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\bar{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak pak $\varphi \in C^k(U)$.

Příklady

15. Jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} e^{u/x} \cos(v/y) &= \frac{x}{\sqrt{2}} \\ e^{u/x} \sin(v/y) &= \frac{y}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu $[1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]$ funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ třídy C^∞ . Spočítejte parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial x}$.

16. Ukažte, že existují funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ definované na nějakém okolí U bodu $[1, 2]$, které jsou na U třídy C^1 , splňují $u(1, 2) = 0$, $v(1, 2) = 0$ a platí pro ně rovnice

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x. \end{aligned}$$

Spočítejte $u'(1, 2)$ a $v'(1, 2)$.

17. Dokažte, že existují funkce $z(x, y)$ a $t(x, y)$, které jsou třídy C^∞ na nějakém okolí U obsahujícím $[1, -1]$ a splňují rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 &= 0 \\ x + y + z - t - 2 &= 0, \end{aligned}$$

spolu se vztahy $z(1, -1) = 2$ a $t(1, -1) = 0$.

Spočítejte $z''(1, -1)$.

18. Ukažte, že rovnice

$$\begin{aligned}x &= u + v^2 \\ y &= u^2 - v^3\end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu $[3, 3]$ funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$ třídy C^∞ , které splňují $u(3, 3) = 2$, $v(3, 3) = 1$. Spočtěte $z_{xy}(3, 3)$, pokud $z = 2uv$.

19. Spočtěte
- x_v
- ,
- y_v
- a
- z_v
- , pokud

$$\begin{aligned}u &= x^2 + y^2, \\ v &= x^2 - 2xy^2, \\ z &= \ln(y^2 - x^2)\end{aligned}$$

v bodě $u = 5$, $v = -7$, $x(5, -7) = 1$ a $y(5, -7) = 2$.

(Rada: Prve řešte první dvě rovnice pomocí Věty o implicitních funkcích, z_v pak vyjádřete řetězovým pravidlem.)

Zkouškové příklady

20. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned}u &= \ln(xy) + \cos v \\ v &= e^{x-u} - y^2 - v\end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu $[x, y, u, v] = [1, 1, 1, 0]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(1, 0) = 1$ a $y(1, 0) = 1$. Rozhodněte, zda existuje totální diferenciál funkce $y(u, v)$ v bodě $[1, 0]$ a pokud ano, nalezněte jej.

21. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned}u &= \ln(x^2 + y^2) - 2xy \\ v &= e^x \sin y + \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu $[x, y, u, v] = [1, 0, 0, 1]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(0, 1) = 1$ a $y(0, 1) = 0$. Nechť navíc je z funkce proměnných x a y definovaná na okolí bodu $[x, y] = [1, 0]$ předpisem $z(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ a nechť Φ je funkce proměnných u a v definovaná na okolí bodu $[u, v] = [0, 1]$ předpisem $\Phi(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$. Spočtěte $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(0, 1)$.