



6. cvičení – Řetízkové pravidlo

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Řetízkové pravidlo). Nechť $G \subset \mathbb{R}^s$ a $H \subset \mathbb{R}^r$ jsou otevřené množiny. Nechť funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G)$ a $f \in C^1(H)$.

Definujme funkci $F : G \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))$. Pak $F \in C^1(G)$.

Pro $a \in G$ označme $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$. Pak pro $j = 1, \dots, s$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

Poznámka 2 (Konkrétně). Je-li funkce $f(x, y, z)$ spojitě diferencovatelná a $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, kde ϕ, ψ, χ jsou spojitě diferencovatelné funkce, pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$



Figure 1: http://mathinsight.org/media/image/image/chain_rule_geometric_objects.png

Věta 3 (Postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu). Nechť $a \in \mathbb{R}^n$, f je reálná funkce n proměnných definovaná na nějakém okolí a . Nechť navíc $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojitě v a . Pak existuje $f'(a)$.

Věta 4 (Derivace ve směru). Nechť $a \in \mathbb{R}^n$, f je reálná funkce n proměnných a existuje $f'(a)$. Pak pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$D_v f(a) = f'(a)(v).$$

Věta 5 (Derivace složeného zobrazení). Nechť $n, k, m \in \mathbb{N}$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ a $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou zobrazení. Nechť $a \in \mathbb{R}^n$, $b = F(a)$ a necht existují $F'(a)$ a $G'(b)$. Pak existuje $(G \circ F)'(a)$ a platí

$$(G \circ F)'(a) = G'(b) \circ F'(a)$$

$((G \circ F)'(a))$ je reprezentovanou součinem matic, které reprezentují zobrazení $G'(b)$ a $F'(a)$.

Notace 6. Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, necht $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a $a \in \mathbb{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j -té proměnné v bodě a značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right), i \neq j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right), i = j,$$

Věta 7. O zaměnitelnosti parciálních derivací

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \leq i, j \leq n$. Nechť platí, že

- (i) funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ je spojitá v bodě a ,
- (ii) funkce $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ je definovaná na nějakém okolí bodu a .

Potom existují a jsou si rovny

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Příklady

Předpokládejme, že jsou splněny všechny nutné předpoklady (speciálně funkce jsou diferencovatelné a mají záměnné smíšené derivace).

1. Vypočtete derivace složených funkcí
 - (a) $z = u\sqrt{1+v^2}$, kde $u = e^{2x}$ a $v = e^{-x}$
 - (b) $z = uv^2w^3$, kde $u = \sin x$, $v = -\cos x$ a $w = e^x$
 - (c) $z = \sin u \cos v$, kde $u = (x-y)^2$ a $v = x^2 - y^2$
 - (d) $w = yz^2 - x^3$, kde $x = e^{r-t}$, $y = \ln(r+2s+3t)$ a $z = \sqrt{rs+t}$
2. ♣ Spočtete parciální derivace $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$.
3. Nechť $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Určete derivace f vzhledem k polárním souřadnicím.
Polární souřadnice: $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$.
4. Nechť $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Určete derivace f vzhledem k polárním souřadnicím.
5. ♡ Ukažte, že funkce $F(x, y, z) = \frac{xy}{z} \ln x + xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ vyhovuje vztahu $x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = F + \frac{xy}{z}$.
6. ✱ Nechť $g(x, y) = f(x+y, x-y)$, spočtete $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ v bodě (a, b) .
7. Ukažte, že funkce $F(x, y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.
8. Výraz $x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ přetransformujte pro funkci $F(u, v) = f(x, y)$, kde $u = y$ a $v = y/x$.

Zkouškové příklady

9. ☆ Nechť $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y, z) = ((x+1)^2(y+1)(z+2), \sin x \cos(2y+z)).$$

Zobrazení $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ má v bodě $[2, 0]$ derivaci reprezentovanou maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Dokažte, že v bodě $[0, 0, 0]$ existuje derivace zobrazení $G \circ F$ a spočtete její reprezentující matici.

- (b) Spočtete derivaci funkce F_1 v bodě $[0, 0, 0]$ podle vektoru $(1, 2, 0)$.
10. Necht' $F = (F_1, F_2, F_3, F_4) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y) = \left(\arctan(x + 2y), x + y, (x^2 + y^2) \frac{|x|}{1 + |y|}, ye^x \right).$$

- (a) Ukažte, že v bodě $(-1, 1)$ existuje derivace funkce F a spočtete její reprezentující matici.
- (b) Spočtete $\frac{\partial F_3}{\partial x}(0, 0)$, pokud existuje.

(2) Uvažujme funkci $f(n, y) = x^2 + y^2$, kde $n(x, y) = x$ a $y = y$.
 (5) Uvažujme funkci $f(n, y, x) = z$, kde $n(x, y) = x$ a $y = y$.
 (6) 2. derivace se budou počítat lépe, když si označíme funkce $h(n, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(n, y)$ a $l(n, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(n, y)$.
 (9) Nezapomínejte odůvodňovat, proč všechny příslušné derivace existují.