

24. cvičení – Teorie

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Implikace

1. Najděte nebo vyvraťte všechny možné implikace mezi následujícími čtveřicemi výroků.
(od prof. M. Huška: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~mhusek/>)

(a) Nechť $A \subset \mathbb{R}$

(A) A je nespočetná

(C) A je neomezená

(B) A je nekonečná

(D) $\mathbb{R} \setminus A$ je spočetná

Řešení:

$A \Rightarrow B$: nespočetné množiny musí být nekonečné

$B \not\Rightarrow A$: protipříklad - spočetné množiny, např. $\mathbb{Q}$ nebo $\mathbb{N}$.

$A \not\Rightarrow C$: protipříklad - interval $(1, 2)$

$C \not\Rightarrow A$: protipříklad - spočetná množina, např. $\mathbb{N}$

$A \not\Rightarrow D$: protipříklad - např. $A = (0, \infty)$, pak $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0]$

$D \Rightarrow A$: množina $\mathbb{R}$ je nespočetná, navíc platí $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R} \setminus A)$. Odtud plyne že A nebo $\mathbb{R} \setminus A$ musí být nespočetná. Kdyby byly obě spočetné, tak jejich sjednocení musí být také spočetné, což je spor.

$B \not\Rightarrow C$: protipříklad - interval $(1, 2)$

$C \Rightarrow B$: sporem - kdyby A byla konečná, tak lze vybrat její největší (a nejmenší) prvek. Pak je ale omezená, což je spor.

$B \not\Rightarrow D$: protipříklad - např. $\mathbb{Q}$

$D \Rightarrow B$: podobně jako $D \Rightarrow A$. Kdyby A byla konečná, tak $\mathbb{R} = A \cup \mathbb{R} \setminus A$ by musela být spočetná, což je spor.

$C \not\Rightarrow D$: protipříklad - např. $\mathbb{Z}$.

$D \Rightarrow C$: sporem - nechť A je omezená, tedy $A \subset (a, b)$. Pak ale $\mathbb{R} \setminus A \supset (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, tedy musí být nespočetná, což je spor.

- (b) Necht $\{a_n\}$ je posloupnost.
- (A) $\{a_n\}$ není konstantní
 - (B) $\{a_n\}$ má prostou podposloupnost
 - (C) $\{a_n\}$ má ryze monotónní podposloupnost
 - (D) množina hodnot $\{a_n\}$ je nekonečná

Řešení:

$A \not\Rightarrow B$: protipříklad - $(-1)^n$

$B \Rightarrow A$: jestliže je b_n prostá podposloupnost a_n , tak musí mít alespoň dva různé prvky. Tedy je má i a_n , tedy není konstantní.

$A \not\Rightarrow C$: protipříklad - $(-1)^n$

$A \not\Rightarrow D$: protipříklad - $(-1)^n$

$D \Rightarrow A$: Kdyby a_n byla konstantní, tak množina hodnot by byla jediný bod $\{a_1\}$, což je spor.

$B \Rightarrow C$: Necht $\{b_n\}$ je prostá podposloupnost a_n . Uvažujme případ, že b_n je omezená. Pak z Bolzano - Weierstrassovy věty existuje konvergentní podposloupnost c_n . Označme $C = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Pak alespoň jedna z množin $K = \{n, c_n > C\}$ a $Z = \{n, c_n < C\}$ je nekonečná (plyne z prostoty). BÚNO K je nekonečná. Pak z definice limity existuje prvek $\bar{c}_1$ takový, že $\bar{c}_1 - C < 1$. Dále musí existovat $\bar{c}_2$: $\bar{c}_2 - C < \frac{\bar{c}_1 - C}{2}$. Postupně zkonstruuujeme posloupnost $\{\bar{c}_k\}$ tak, že $\bar{c}_{k+1} - C < \frac{\bar{c}_k - C}{2}$. Uvažovaná podposloupnost $\bar{c}_k$ je pak monotónní.

Necht b_n není omezená. BÚNO b_n je neomezená shora. Pak existuje prvek $\bar{b}_1 > 1$. K němu existuje prvek $\bar{b}_2 > 2\bar{b}_1$. Dále konstruuje $\bar{b}_{n+1} > 2\bar{b}_n$. Hledaná monotónní podposloupnost je pak $\{\bar{b}_n\}$.

$C \Rightarrow B$: ryze monotónní podposloupnost je zároveň prostá

$C \Rightarrow A$: Plyne ze $C \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.

$B \Rightarrow D$: Necht b_n je prostá podposloupnost. Pro ni platí, že $b_n \neq b_m$, kdykoli $m \neq n$. Pak množina hodnot posloupnosti a_n obsahuje množinu $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$, která ale musí být nekonečná (žádné dva prvky b_n nemohou být stejné).

$D \Rightarrow B$: Uvažujme A množinu hodnot a_n . Položme $b_1 = a_1$. Položme $A_1 = A \setminus \{b_1\}$. Protože A je nekonečná, tak i A_1 je nekonečná.

Položme $b_2 = a_k$, tak, že k je nejmenší možné takové k , že $a_k \in A$. Pak platí, že $A_2 = A_1 \setminus \{b_k\}$ je opět nekonečná.

Postupujme indukcí.

$C \Rightarrow D$: Plyne ze $C \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow D$.

$D \Rightarrow C$: Plyne ze $D \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow C$.

2 Úvod a Posloupnosti

2. Existují posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tak, že $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = +\infty$ a $\lim a_n b_n$ neexistuje?

Řešení: Ano. Např. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n$.

3. Sestrojte konvergentní posloupnost takovou, že $\max\{a_n\}$ neexistuje.

Řešení: Např. $a_n = -1/n$.

4. Nechť $\{a_n\}$ konverguje. Musí platit $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ a $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$?

Řešení:

Ano - limita vybrané podposloupnosti a aritmetika limit.

Ne, např. $\{q^n\}$, $|q| < 1$ (aritmetika limit selže kvůli dělení 0).

5. (a) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost celých čísel. Musí být limita celé číslo?

Řešení: Ano. Aby byla taková posloupnost konvergentní, musí být od jistého členu konstantní. Tedy limita je celé číslo.

- (b) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?

Řešení: Ne. Např. posloupnost $3; 3, 1; 3, 14; 3, 141; 3, 1415 \dots \rightarrow \pi$.

6. Jestliže platí, že $a_{n+2} \geq a_n$, musí mít posloupnost limitu? Co když přidáme omezenost?

Řešení: Ne. Např. $(-1)^n$.

7. Najděte k dané neomezené posloupnosti a_n takovou nenulovou posloupnost b_n , aby $a_n b_n \rightarrow 0$.

Řešení: Pro členy $a_n = 0$ položme $b_n = 1$. Pro nenulové a_n uvažujme $b_n = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{n}$.

8. Stačí pro konvergenci posloupnosti, aby $|a_{n+1} - a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$?

Řešení: Ne. Např. pro $a_n = \log n$ máme $\lim_{n \rightarrow \infty} \log n = \infty$, ale $\log(n+1) - \log n = \log \frac{n+1}{n} \rightarrow 0$.

9. Nechť $b \in \mathbb{R}^*$. Najděte posloupnost $\{a_n\}$, aby $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$.

Řešení: Pro $b \in \mathbb{R}$ uvažujme $a_n = b^n$. Pro $b = \infty$ máme např. $a_n = n^n$. Pro $b = -\infty$ pak $a_n = (-1)^n n^n$.

10. Nechť M je neomezená množina, nechť $\beta > 0$. Existuje pak $A \subset M$ nekonečná tak, že $\forall x, y \in A$, $x \neq y$ platí, že $|x - y| > \beta$?

Řešení: Ano. BÚNO nechť M je neomezená shora. Pak uvažujme množiny $B_1 = [0, \beta)$, $B_2 = [\beta, 2\beta)$, $B_3 = [2\beta, 3\beta) \dots$

Položme $I_s = \{i \in \mathbb{N} : i \text{ je sudé a } M \cap B_i \neq \emptyset\}$. Analogicky položme $I_l = \{i \in \mathbb{N} : i \text{ je liché a } M \cap B_i \neq \emptyset\}$.

Pak alespoň jedna z množin I_s a I_l je nekonečná množina (jinak by M byla omezená).

BÚNO I_s je nekonečná. Pak z každé množiny B_i , kde $i \in I_s$ vybereme jeden prvek $x_i \in B_i$. Množina $A = \bigcup_{i \in I_s} \{x_i\}$ pak má odpovídající vlastnosti.

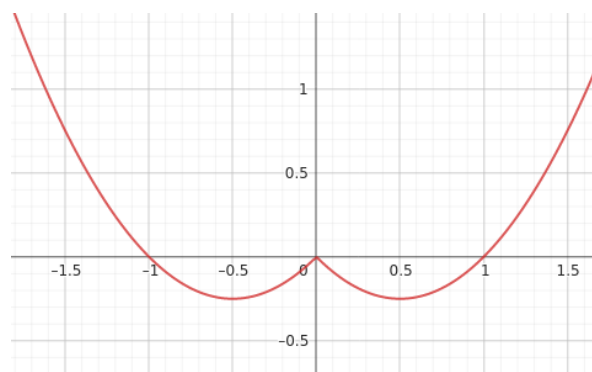
3 Funkce

11. Necht' je funkce klesající na disjunktních intervalech I a J . Musí být klesající na $I \cup J$?

Řešení: Ne. Např. $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

12. Necht' je funkce konvexní na intervalu $[-1, 0]$ a také na $[0, 1]$? Musí být pak konvexní na $[-1, 1]$?

Řešení: Ne. Např. Sudé rozšíření funkce $x(x-1)$.



13. Sestrojte (stačí obrázkem) nezápornou funkci f na intervalu $(0, 1)$, nespojitou právě v bodech množiny $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ tak, aby $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$ a aby

$$\inf\{f(x); x \in (0, 1)\} = 0, \quad \sup\{f(x); x \in (0, 1)\} = 1.$$

Řešení: Např. $f(1/n) = 1/(n-1)$, $f = 0$ jinde.

14. Necht' f je nekonstantní periodická funkce na $\mathbb{R}$. Ukažte, že pak neexistuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Řešení: Sporem. Necht' f je periodická s periodou p . Jelikož je nekonstantní, tak existují body a, b tak, že $f(a) \neq f(b)$. Pak pro různé dvě posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a + pn) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a) = f(a) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b + pn) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b) = f(b)$. Což je spor s Heineho větou.

15. Necht' f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, pro kterou existují limity v nevlastních bodech a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Zjistěte, zda je pak již f omezená a zda nabývá v alespoň jednom bodě z $\mathbb{R}$ maxima nebo minima.

Řešení: Je-li funkce konstantní, pak již musí být nutně $f \equiv 0$, tedy je omezená a nabývá extrémů.

Necht' f není konstantní.

Omezenost. Pak existují intervaly $(-\infty, a)$ a (b, ∞) takové, že na nich $|f| < 2$ (z definice limity). Na intervalu $[a, b]$ je pak f omezená z věty o spojitosti a nabývání extrémů.

Nabývání extrémů. Jelikož f je nekonstantní, tak existuje x_0 , takové, že $f(x_0) \neq 0$, BÚNO $f(x_0) > 0$. Pak z definice limity existují intervaly $(-\infty, a)$ a (b, ∞) takové, že na nich $f(x) < f(x_0)/2$.

Interval $[a, b]$ je omezený a uzavřený, tedy na něm funkce f nabývá maximum. Jeho hodnotu můžeme odhadnout $\max_{[a, b]} f(x) \geq f(x_0)$. Mimo tento interval vyšší hodnota nemůže nastat, tedy jsme našli maximum.

16. Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} - \arctan x$$

konstantní ve svém definičním oboru a řešení odůvodněte.

Řešení: Na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$ má funkce derivaci

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 + 1} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Na každém intervalu zvlášť je tedy konstantní. Na celém D_f ale konstantní není, protože např. $f(-1) = 0 - \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, ale $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \arctan(-1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$.

17. Najděte příklad funkce, pro kterou existují derivace na intervalech (a, c) a (c, b) , dále existují a jsou si rovny $\lim_{x \rightarrow c-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow c+} f'(x)$ a přitom neexistuje $f'(c)$.

Řešení: Např. $|\operatorname{sgn} x|$.

18. Napište příklad funkce, která není spojitá v bodě 7 a přitom $f'_+(7) = 2$.

Řešení: Např.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 7, \\ 2x, & x \geq 7. \end{cases}$$

19. Necht' je funkce f spojitá v bodě 0. Musí existovat $f'_+(0)$? Dokažte, nebo sestrojte protipříklad.

Řešení: Ne. Např.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak $0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ (omezená a mizející), tedy je f spojitá v 0.

Pro derivaci máme

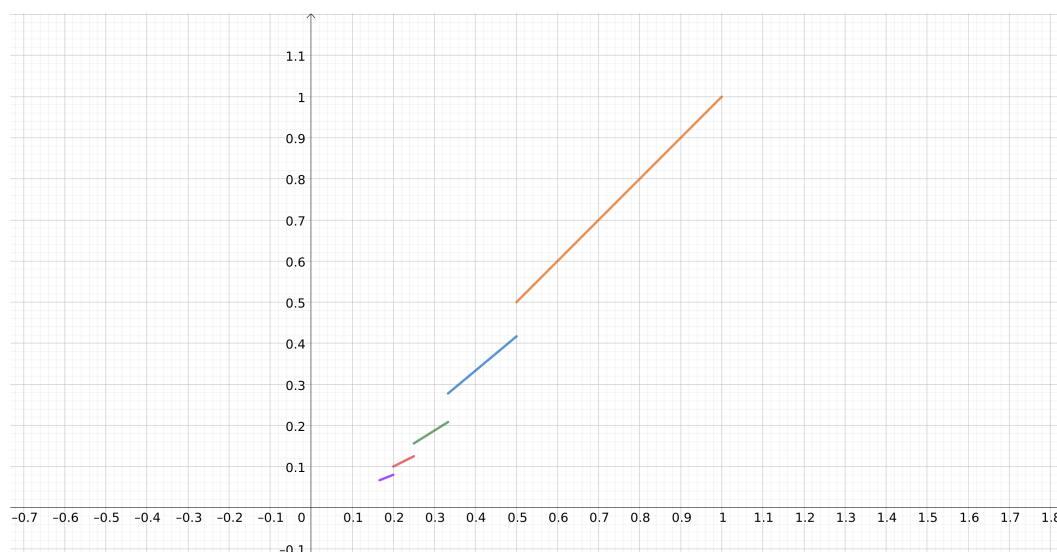
$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \sin \frac{1}{h}$$

Limita vpravo ale neexistuje. Uvažujme Heineho větu a posloupnosti $a_n = \frac{1}{2\pi n}$ a $b_n = \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)}$.

20. Sestrojte (stačí obrázkem) ryze monotónní funkci na intervalu $(0, 1)$, která má infimum hodnot rovné 0, supremum hodnot rovné 1 a je nespojitá právě v bodech $1/n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Řešení:

Konstruujeme postupně do 0 jako na obrázku:



21. Necht $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce. (A předpokládáme, že následující výroky mají smysl.) Určete, které výroky jsou pravdivé

(a) f i g jsou liché.

i. $f + g$ je lichá

Řešení: Ano. $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) + -g(x) = -(f + g)(x)$

ii. fg je lichá

Řešení: Ne, je sudá. $(fg)(-x) = -f(x) \cdot -(g(x)) = f(x)g(x)$

iii. $f(g)$ je lichá

Řešení: Ano, $f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x))$

(b) f je sudá, g je lichá.

i. fg je sudá

Řešení: Ne. Je lichá, $(fg)(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -(fg)(x)$

ii. $f(g)$ je sudá

Řešení: Ano. $f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$

iii. $g(f)$ je sudá

Řešení: Ano. $g(f(-x)) = g(f(x))$

iv. $g + f$ je sudá

Řešení: Ne. Např. x a x^2 . Pak $f + g = x + x^2 = x(1 + x)$.

(c) f i g jsou rostoucí

i. $f + g$ jsou rostoucí

Řešení: Ano. Necht $s < t$. Pak $(f + g)(s) = f(s) + g(s) \leq f(t) + g(t)$.

ii. fg jsou rostoucí

Řešení: Ne. Např. x a x .

iii. $f(g)$ jsou rostoucí

Řešení: Ano. Necht $s < t$. Pak $g(s) \leq g(t)$. Tedy $f(g(s)) \leq f(g(t))$.

(d) f je sudá

i. je-li f rostoucí na $(0, \infty)$, je rostoucí i na $(-\infty, 0)$.

Řešení: Ne. Např. x^2 .

ii. je-li f konvexní na $(0, \infty)$, je konvexní i na $(-\infty, 0)$.

Řešení: Ano. Je-li f konvexní na $(0, \infty)$, tak pro $0 < s < t < u$ máme

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

Pro $-u < -t < -s < 0$ pak je

$$\frac{f(-u) - f(-t)}{-u + t} = \frac{f(u) - f(t)}{-(u - t)} \leq -\frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{f(-t) - f(-s)}{-t + s}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right)$$

$$n \rightarrow \infty$$

Heine $x_n = n$

$$\rightarrow e^{x \log(1 + \frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{\frac{0}{0}} \frac{e^{x \log(1 + \frac{1}{x})} \cdot \left(\log(1 + \frac{1}{x}) + x \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{e^{\frac{\log(1 + \frac{1}{x})}{x}}}_{\rightarrow e^1} \cdot \underbrace{\frac{\log(1 + \frac{1}{x}) + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}_{\rightarrow -\frac{1}{2}} = e \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{e}{2}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{x}) + \frac{-1}{1+x}}{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{\frac{0}{0}} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} + 1 \cdot \frac{1}{(1+x)^2}}{2 \cdot \frac{1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} x^3 \cdot \left(\frac{-1}{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} x^3 \left(\frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(1+x)^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{x^3 (-1 \cdot (x+1) + 1x)}{x(x+1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{-x^3}{x^3 (1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{x})} \stackrel{\text{AL}}{=} -\frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + \cos x}{x^2}$$

Taylor: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$
 $r=1/2$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

$x \rightarrow 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x + \frac{-1}{4}x^2 + o(x^2) - (3+x - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + o(x^2)}{x^2} = -\frac{5}{12} + 0 = \underline{\underline{-\frac{5}{12}}}$$

$$(3) \quad f = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \\ 0, & x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$



(a) $D_f = \mathbb{R}$ (problematičtější body: $\sin x = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
pro definování zvlášť)

(b) f je spoj. na $(0, \pi) + k\pi$ (složení, podle spoj. (nenul.))

v bodech $0 + k\pi$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} = 0 = f(0)$$

volíme $f(y) = e^y$

$$g(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sin^2 x} = -\infty$$

$\neq$

(D) $\frac{1}{\sin^2 x} \neq 0$
na $P(a, b_2)$

$$\frac{-1}{0+}$$

Věta o limitě a dělení 0
 $\sin^2 x \neq 0$ na $P(a, b_2)$

v bodech $0 + k\pi$ analogicky (nač f je periodická - viz níže)

(c) funkce je π -period:

$$e^{-\frac{1}{\sin^2(x+k\pi)}} = e^{-\frac{1}{(\sin x \cos(k\pi) + \sin k\pi \cos x)^2}} = e^{-\frac{1}{(\sin x (\pm 1))^2}} = e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$f(0 + k\pi) = f(0) = 0$$

$\rightarrow$ budeme dále vyšetřovat na $[0, \pi]$

(d) f je sudá: $e^{-\frac{1}{(\sin(-x))^2}} = e^{-\frac{1}{(-\sin x)^2}} = e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$

$$f(k\pi) = 0 = f(-k\pi)$$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq$

zvolíme $a_n = n\pi$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$

$b_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} + n\pi)}} = e^{-1}$

tedy spór s Heineho a jednoz. limity

(f) $x \in (0, \pi)$:

$$f' = e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot (-1)(-2) \frac{1}{\sin^3 x} \cdot \cos x$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \underbrace{e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{-1}{\sin^2 x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{-\sin x}{x} \cdot \sin x}_{\rightarrow 0} \stackrel{4/0}{=} 0$$

volsef $f(y) = e^y \cdot y$

$$g(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-1}{\sin^2 x} = -\infty$$

" $\frac{-1}{0+}$ " $\frac{-1}{\sin^2 x} < 0$ na $P(0, \pi/2)$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty}$$

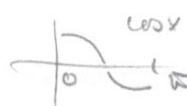
$$e^y \cdot y = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y}{e^{-y}} \stackrel{4/0}{=} \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-y}} \stackrel{4/0}{=} 0$$

$f'_-(0) = 0$ (tęż z lewej)

$f'_-(\pi) = 0$ (tęż z π -period)

(g) monotoniczność $x \in (0, \pi)$

$$f' = \underbrace{e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}}_{> 0} \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin^3 x}}_{> 0} \cdot \cos x$$



$f' < 0$ na $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ $\rightarrow$ f nie jest rosnąca na $(\frac{\pi}{2}, \pi)$
 $f' > 0$ na $(0, \frac{\pi}{2})$ $\rightarrow$ f jest rosnąca na $(0, \frac{\pi}{2})$

(h) $x \in (0, \pi)$

$$f'' = 2e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot 2 \frac{\cos x}{\sin^3 x} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} + e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot 2 \cdot \frac{-\sin x \sin^3 x - \cos x \cdot 3 \sin^2 x \cos x}{\sin^6 x}$$

$$= 2e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \frac{2 \cos^2 x - \sin^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^6 x}$$

$$(1) \quad \frac{2 e^{\frac{1}{\sin^6 x}}}{\sin^6 x} \quad (2 \cos^2 x - \sin^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x)$$

$x \in (0, \pi)$

> 0

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin^4 x - 3 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) = 0$$

$$2 - 2 \sin^2 x - \sin^4 x - 3 \sin^2 x + 3 \sin^4 x = 0$$

$$2 - 5 \sin^2 x + 2 \sin^4 x = 0$$

$$y = \sin^2 x$$

$$2 - 5y + 2y^2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{3\pi}{4}$$



f''

f

f je konvex na $(0, \frac{\pi}{4})$,
 $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$

konkáv na $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$

na fletní body

$$x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4}$$

$(+ 2\pi)$

(f) asymptoty:

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty} = 0$$

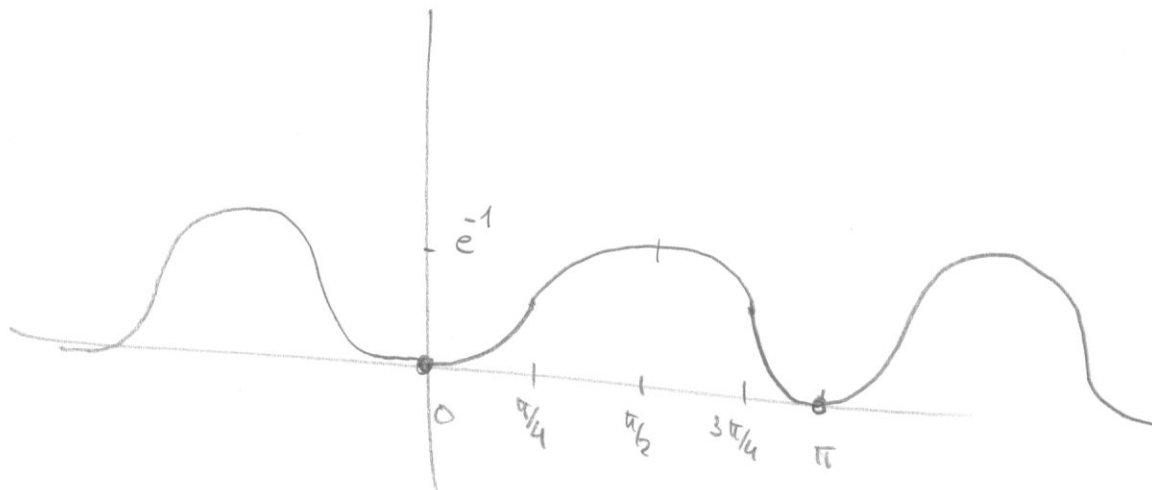
f je m: f je spoj na $[0, \pi]$ $\rightarrow$ nabývá extrémů $\rightarrow f$ je m.

f je period $\rightarrow f$ je m na $\mathbb{R}$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - O x = \frac{\pi}{2} \text{ (viz (c)) } \text{ tedy asymptota } v \approx \frac{\pi}{2}$$

f je sčítat $\rightarrow$ asymptota $v = \infty$ také $\frac{\pi}{2}$

(2)



(e)

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-1}$$

lok = glob max $f = e^{-1}$ a je v bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
-4- min $f = 0$ $0 + k\pi$

$H_f = [0, e^{-1}]$ plyno ze spoj f a Bolzmannovy vety

(4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezhodnotě o pravdivosti

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0+} f^2(x) = 1$$

Platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \cdot f(x) \stackrel{AL}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$$

Nepatří: protipříklad:

$$f = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pať $f^2 = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0+} f^2 = 1$ ale $\lim_{x \rightarrow 0+} f \nexists$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0+} f^3(x) = 1 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$$

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[3]{f^3(x)} = 1$$

VOLEF meji: $h(y) = \sqrt[3]{y}$ $\lim_{y \rightarrow 1} \sqrt[3]{y} = 1$ (S) $\sqrt[3]{y}$ spoj. v 1
vnutřní $f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 0+} f^3(x) = 1$

(Složení funkcí je dobře definováno.)