23. cvičení – Taylorův polynom – limity

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Všechna malá o se týkají $x \to 0$, $y \to 0$.

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$

   Řešení: Budeme rozvíjet do 3. řádu:
   $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),$$
   tedy máme
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6} + 0.$$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

   Řešení: Budeme rozvíjet do 2. řádu:
   $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$
   a
   $$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$
   Dohromady
   $$\ln(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)^2}{2} + o\left(\left(-\frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right)\right)^2\right)$$
   tedy
   $$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2!} + o(x^3).$$
   Pak
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2} \overset{VOAL}{=} -\frac{1}{2} + 0$$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x + 2x^3}{x^2} = 0$

   Řešení: Rozvineme do 3. řádu:
   $$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$
   Pak
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + 2x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x + 2x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{11x^3}{6} + o(x^4)}{x^2} \overset{VOAL}{=} 0+0$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \sin(x\ln(1+x))}{x^2} = 1$

Řešení: Rozvineme do 2. řádu:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

Navíc

$$\sin y = y + o(y^2).$$

Dohromady

$$\cos x \sin(x\ln(1+x)) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + o\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)\right)$$
$$= x^2 + o(x^2)$$

Celkem pak máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sin(x\ln(1+x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1.$$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) = -\dfrac{1}{4}$

Řešení:

Protože na rozvíjení v nekonečnu nemáme vztahy, provedeme substituci $y = \frac{1}{x}$ (výsledek pak dostaneme větou o limitě složené funkce).

$$\lim_{x\to +\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) \to \lim_{y\to 0+} y^{-3/2}\left(\sqrt{\frac{1}{y}+1} + \sqrt{\frac{1}{y}-1} - 2\sqrt{\frac{1}{y}}\right) =$$
$$= \lim_{y\to 0+} y^{-2}\left(\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y} - 2\right).$$

Nyní rozvineme obě odmocniny do druhého řádu

$$= \lim_{y\to 0+} y^{-2}\left(\left(1 + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}y^2 + o(y^2)\right) + \left(1 - \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}y^2 + o(y^2)\right) - 2\right) =$$
$$= \lim_{y\to 0+}\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + o(1)\right) = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{4}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} = \dfrac{1}{3}$

Řešení:

Provedeme substituci $y = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} = \lim_{x\to +\infty} x\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - x\sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}} \to \lim_{y\to 0+} \frac{\sqrt[6]{1+y} - \sqrt[6]{1-y}}{y}.$$

Nyní rozvineme odmocniny v čitateli, stačí do prvního řádu

$$= \lim_{y\to 0+} \frac{(1 + \frac{1}{6}y + o(y) - (1 - \frac{1}{6}y + o(y))}{y} = \frac{1}{3} + \lim_{y\to 0+} \frac{o(y)}{y} = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

(g)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]=\frac{1}{6}$$

Řešení: Provedeme substituci $y=\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]\to\lim_{y\to0+}\frac{\left[\left(1-y+\frac{1}{2}y^2\right)e^y-\sqrt{1+y^6}\right]}{y^3}=$$

a nyní rozvineme exponencielu a odmocninu v čitateli do třetího řádu

$$=\lim_{y\to0+}\frac{\left(1-y+\frac{1}{2}y^2\right)\left(1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3)\right)-1+o(y^6)}{y^3}=$$

$$=\lim_{y\to0+}\frac{(1-y+\frac{1}{2}y^2)+(y-y^2+\frac{1}{2}y^3)+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3)-1}{y^3}=$$

$$=\lim_{y\to0+}\frac{\frac{y^3}{6}+o(y^3)}{y^3}=\frac{1}{6}+\lim_{y\to0+}\frac{o(y^3)}{y^3}=\frac{1}{6}.$$

(h)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}$$

Řešení: Provedeme substituci $y=\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\to\lim_{y\to0+}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\ln(1+y)\right]=$$

a nyní rozvineme logaritmus do druhého řádu

$$=\lim_{y\to0+}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\left(y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)\right]=$$

$$=\lim_{y\to0+}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{y}+\frac{1}{2}+o(1)\right]=\frac{1}{2}.$$

(i)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\frac{1}{4}$$

Řešení:
Budeme hledat rozvoj čitatele do třetího řádu. Je

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

odkud vyplývá

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}x}=1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\operatorname{tg}^2x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}\operatorname{tg}^3x+o(x^3)=$$

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

Na druhou stranu

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}\sin x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\sin^2 x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}\sin^3 x + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

odkud vyplývá, že

$$\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)x^3 + o(x^3) = \frac{1}{4}x^3 + o(x^3),$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \frac{1}{4}.$$

(j)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} = -2$$

Řešení: Zřejmě stačí rozvést čitatel do třetího řádu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2e^{2x} - (1 - \frac{1}{2}x^2e^{-2x}) + o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{-2x} - e^{2x}}{2x} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right) = -2 + 0 = -2.$$

(k)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)} = -32$$

Řešení:
Protože platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2},$$

pak, existuje-li limita napravo, platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)} = \lim_{x\to 0} -4\frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{x^4} =$$

stačí tedy rozvést čitatel do čtvrtého stupně. Tak dostaneme

$$= \lim_{x\to 0} -4\frac{(1 + x^2 + 5x^4 + \frac{x^4}{2}) - (1 + x^2 - 3x^4 + \frac{x^4}{2}) + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} -4\frac{8x^4 + o(x^4)}{x^4} = -32.$$

(l)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Řešení:

Čitatel musíme rozvést do třetího řádu. Platí, že

$$\begin{aligned}\sinh(\operatorname{tg} x) &= \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{-\operatorname{tg} x}}{2} \\ &= \frac{1 + \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} + o(x^3) - (1 - \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} + o(x^3))}{2} \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} + o(x^3)\end{aligned}$$

dostáváme tak

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} - x + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{6} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3}$$

A dále platí, že

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - x^3/3! + o(x^4)}{1 - x^2/2 + o(x^3)} =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{x^2}{2} + o(x^3))^k =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)$$

a proto dostaneme, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{6} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} x^3 + o(x^3)}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{6} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{2}.$$

(m) Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^4} = 0$.

Řešení:
Platí

$$x - a\sin x - b \sin x \cos x = x - a\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \frac{b}{2}\left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^4)\right) =$$

$$= x - ax + \frac{ax^3}{6} - bx + \frac{4bx^3}{6} + o(x^4).$$

Aby limita byla nulová, musí být pro každé x z nějakého okolí nuly

$$x - ax - bx = 0 \implies 1 - a - b = 0$$

$$\frac{ax^3}{6} + \frac{4bx^3}{6} = 0 \implies a + 4b = 0$$

Odtud máme $a = -4b$ a $1 + 4b - b = 0$, tedy $b = -\frac{1}{3}$ a $a = \frac{4}{3}$.

(n) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^x - 1}{x^n}$

Řešení:

Je $(1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$ a rozvoj je

$$e^{x\ln(1+x)} = e^{x(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))} = e^{x^2-x^3/2+o(x^3)} = 1+x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3) = 1+x^2+o(x^2),$$

tudíž

$$(1+x)^x - 1 = e^{x\ln(1+x)} - 1 = x^2 + o(x^2),$$

hledané $n = 2$ a platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1.$$

(o) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+\sin x) - \ln^2(1+\arcsin x)}{x^n}$

Řešení:

Porovnáme rozvoje funkcí $\sin x$ a $\arcsin x$ a zjistíme první člen, kde se liší. Ten bude určující.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Odtud vidíme, že pravděpodobně budeme muset rozvíjet do třetího řádu. Je

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3),$$

a proto

$$\ln(1+x\pm\frac{x^3}{6}+o(x^3)) = \left(x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

z čehož vyplývá, že

$$\ln^2(1+x\pm\frac{x^3}{6}+o(x^3)) = x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 \pm \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Není třeba pokračovat do vyšších mocnin, hledali jsme první člen, kde se rozvoje budou lišit. Odtud vyplývá

$$\ln^2(1+\sin x) - \ln^2(1+\arcsin x) = \ln^2(1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)) - \ln^2(1+x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)) =$$

$$= \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Odtud vyplývá, že hledané $n = 4$ a platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+\sin x) - \ln^2(1+\arcsin x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{2}{3}.$$

Zkouškové příklady

2. (a) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x) = \arctan(\sin x) - \sin\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)$ řádu 5 v bodě $x = 0$ a spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(\arcsin x)(\cos x) - \arctan x}$$

Řešení: Zdroj: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/0809/ls/ma/index.html

Máme

$$\begin{aligned}\arctan x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5),\\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\arctan(\sin x) = {} & x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)^3\\ & + \frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)^5\right)\\ = {} & x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) &= \left(x - \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^5 + o\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^5\\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{40}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Dohromady

$$T_5^{f,0} = \frac{1}{5}x^5.$$

Dále rozvineme jmenovatele. Platí

$$\begin{aligned}\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5),\\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\arcsin x \cdot \cos x - \arctan x &= \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)\\ &\quad - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)\right)\\ &= -\frac{1}{6}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Pro limitu pak máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{5}x^5 + o(x^5)}{-\frac{1}{6}x^5 + o(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{5} + \frac{o(x^5)}{x^5}}{-\frac{1}{6} + \frac{o(x^5)}{x^5}} = -\frac{6}{5}$$

(b) Určete hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-2x} - x\sqrt[3]{1-3x}}{x - a\sin\frac{x}{a}} = 1.$$

Řešení: Rozvineme odmocniny do 2. řádu

$$\sqrt{1-2x} = 1 + \frac{1}{2}(-2x) + \frac{\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}}{2}(-2x)^2 + o((-2x)^2)$$
$$\sqrt[3]{1-3x} = 1 + \frac{1}{3}(-3x) + \frac{\frac{1}{3}\cdot -\frac{2}{3}}{2}(-3x)^2 + o((-3x)^2)$$

Dohromady pro čitatele máme

$$x\sqrt{1-2x} - x\sqrt[3]{1-3x} = \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

Pro jmenovatele je pro $a \neq 0$

$$x - a\sin\frac{x}{a} = x - a\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{6}\frac{x^3}{a^3} + o\left(\frac{x^3}{a^3}\right)\right) = \frac{x^3}{6a^2} + o(x^4)$$

Limita:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-2x} - x\sqrt[3]{1-3x}}{x - a\sin\frac{x}{a}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6a^2} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6a^2} + \frac{o(x^4)}{x^3}} = 3a^2$$

Tedy řešíme rovnici $3a^2 = 1$, odtud

$$a = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

(c) Rozviňte funkce $e^{\cos x}$ do Taylorova polynomu čtvrtého řádu se středem v 0 a spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - \frac{e}{2}(e^x + e^{-x}) + ax^2}{x^4}$$

(pokud existuje) v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.
Řešení: Rozviňme do 4. řádu:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^2)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Odtud

$$
\begin{aligned}
e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
e^{\cos x} &= e \cdot e^{\cos x - 1} \\
&= e\Bigg(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2}{2} \\
&\quad + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^3}{6} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^4}{24} \\
&\quad + o\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^4\right)\Bigg) \\
&= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}
$$

Dohromady máme

$$
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - \frac{e}{2}(e^x + e^{-x}) + ax^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(a-e)x^2 + \frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4}
$$

Pro $a = e$ máme

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{e}{8}
$$

Pro $a > e$ je dle věty o nevlastní limitě podílu

$$
\lim_{x\to 0} \frac{(a-e)x^2 + \frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \infty.
$$

Analogicky pro $a < e$ je

$$
\lim_{x\to 0} \frac{(a-e)x^2 + \frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\infty.
$$

(d) Určete všechny hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které existuje vlastní limita

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\arctan x) - \cos(\sin x) + ax^3}{x^4}
$$

Pro tyto hodnoty a limitu vypočítejte.

Řešení: Platí

$$
\begin{aligned}
\arctan x &= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4), \\
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + + o(x^4), \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^2).
\end{aligned}
$$

Odtud

$$\cos(\arctan x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)^4}{24} + o\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)^2,$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$
$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^4}{24} + o\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2.$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

Pro limitu tedy máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\arctan x) - \cos(\sin x) + ax^3}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^3 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4}$$

Aby byla limita vlastní, musí být $a = 0$. Pak dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6}$$

(e) Určete koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax) + x\arctan(bx) - b}{x^4}$$

existovala vlastní. Pro tyto hodnoty a, b limitu vypočítejte.
Řešení: Pro $a, b \neq 0$ máme rozvoj

$$\cos ax = 1 - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^4x^4}{24} + o(x^2).$$
$$\arctan bx = bx - \frac{1}{3}b^3x^3 + o(x^4),$$

Limita pak je tvaru

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax) + x\arctan(bx) - b}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-b) + \left(b - \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \frac{a^4 - 8b^3}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4}$$

Aby limita existovala vlastní, musí platit

$$1 - b = 0$$
$$b - \frac{a^2}{2} = 0,$$

tedy $b = 1$, $a = \pm\sqrt{2}$.
Pro tyto hodnoty pak je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{4-8}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{6}$$

Dále, uvažujme $a = 0$, $b \neq 0$. Pak

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x\arctan(bx) - b}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-b) + bx^2 - \frac{b^3}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4}$$

Aby limita existovala vlastní, musí platit

$$\begin{aligned} 1 - b &= 0 \\ b &= 0, \end{aligned}$$

což není možné.
Nechť nyní $a \neq 0$, $b = 0$. Pak

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax)}{x^4} = \infty,$$

což nesplňuje požadavek na vlastní limitu.
Poslední kombinace $a = b = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = \infty,$$

což také nesplňuje podmínku vlastní limity.
Závěr: Pro $b = 1$, $a = \pm\sqrt{2}$ vyjde limita rovna $-\frac{1}{6}$.

Odhady

3. Pomoci Taylorova polynomu 1. stupně určete přibližné hodnoty následujících výrazů (a porovnejte s kalkulačkou)

   (a) $\sqrt[3]{e}$
   Řešení:

   $$\approx 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

   kalkulačka

   $$1,39561$$

   (b) $\arcsin 0,2$ **Řešení:**

   $$\approx 0,2$$

   kalkulačka

   $$0,201$$

   (c) $(1,04)^4$ **Řešení:**

   $$\approx 1 + 4 \cdot 0,04 = 1,16$$

   kalkulačka

   $$1,1699$$

   (d) $\ln(1,02)$ **Řešení:**

   $$\approx 0,02$$

   kalkulačka

   $$0,01980$$

(e) $\arctan 1,1$ **Řešení:**

$$\approx 1,1$$

kalkulačka

$$0,83298$$

(f) $\sin(-0,22)$ **Řešení:**

$$\approx -0,22$$

kalkulačka

$$-0,2182$$

4. Vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než $0,001$.
Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html
Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí $f = e^x$, kterou rozvíjíme v bodě $a = 0$ a budeme dosazovat za $x = 1$. Pracujeme tedy s intervalem $[0,1]$. Uvažujme nějaké $n \in \mathbb{N}$. Protože $e^x \in \mathcal{C}^{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jsou podmínky splněny a existuje $c \in [0,1]$ takové, že
$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$
Konkrétně
$$e^1 - T_n^{e^x,0}(1) = \frac{1}{(n+1)!} e^c (1-0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}.$$
Nejhorší situace (největší možná chyba) nastává pro $c = 1$, tedy budeme odhadovat výraz
$$\frac{e}{(n+1)!}$$
Aplikujeme odhad $e < 3$ a dostáváme nerovnici
$$\frac{3}{(n+1)!} < 0,001$$
Tedy
$$3000 < (n+1)!$$
Ta je splněna pro $n \geq 6$.
Tedy při aproximaci čísla e potřebujeme Taylorův polynom alespoň stupně 6. Dostáváme
$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2,718055556.$$

5. Pro jaké hodnoty platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?
Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html
Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí $f = \cos x$, kterou rozvíjíme v bodě $a = 0$ do stupně $n = 3$ (rozvoj pro $n = 2$ a $n = 3$ je stejný). Uvažujme $x > 0$. Pracujeme tedy s intervalem $[0, x]$. Protože $\cos x \in \mathcal{C}^4$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jsou podmínky splněny a existuje $c \in [0, x]$ takové, že
$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Konkrétně
$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{(4)!}\cos(c)(x-0)^4 \le \frac{x^4}{24}.$$
Řešíme tedy nerovnici
$$\frac{x^4}{24} \le 0,0001.$$
Tedy
$$x^4 \le 0,0024.$$
To platí cca pro $x < 0,222$. Protože funkce $\cos x$ je sudá, lze pro $x < 0$ aplikovat stejný postup.
Dohromady
$$x \in (-0,222, 0,222).$$
Tedy při aproximaci čísla e potřebujeme Taylorův polynom alespoň stupně 6. Dostáváme
$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2,718055556.$$

6. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu $(0,9;1,1)$ funkci $\arctan x$ Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě $x_0 = 1$.
Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html
Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí $f = \arctan x$, kterou rozvíjíme v bodě $a = 1$ do stupně $n = 2$. Uvažujme $1 < x < 1.1$. Pracujeme tedy s intervalem $[1, x]$. Protože $\arctan x \in \mathcal{C}^3$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jsou podmínky splněny a existuje $c \in [1, x]$ takové, že
$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$
Navíc platí
$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{1+x^2} \\ f'' &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ f''' &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$
a
$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{\pi}{4} \\ f'(1) &= \frac{1}{2} \\ f''(1) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$
Tedy
$$T_2^{\arctan x, 1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2$$

Pro odhad chyby pro $x \in [1, 1.1]$ tedy máme

$$\arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 = \frac{1}{3!}\frac{6c^2-2}{(1+c^2)^3}(x-1)^3 \leq \frac{1}{3!}\frac{6c^2+2}{(1+1^2)^3}(1.1-1)^3$$
$$\leq \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 1.1^2 + 2}{8} \cdot \frac{1}{1000} \doteq 0.19292 \cdot 0.001$$

Analogicky pro $x \in [0.9, 1]$ je

$$\left|\arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2\right| = \left|\frac{1}{3!}\frac{6c^2-2}{(1+c^2)^3}(x-1)^3\right| \leq \frac{1}{3!}\frac{6c^2+2}{(1+0.9^2)^3}|0.9-1|^3$$
$$\leq \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 1^2 + 2}{1.81^3} \cdot \frac{1}{1000} \doteq 0.22486 \cdot 0.001$$