



22. cvičení – Teorie z písemek

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte nebo sestrojte protipříklad):

1. Nechtě $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jsou spojité funkce.

(a) Nechtě $f(0) = g(0) = 0$ a $f(1) = g(1) = 1$. Musí existovat $x \in (0, 1)$ tak, že $f(x) = g(x)$?

Řešení: Nemusí. Protipříklad: $f = \sqrt{x}$, $g = x^2$.

(b) Nechtě $f(0) = g(1) = 0$ a $f(1) = g(0) = 1$. Musí existovat $x \in (0, 1)$ tak, že $f(x) = g(x)$?

Řešení: Musí. Uvažujme funkci $h(x) = f(x) - g(x)$. Pak $h(0) = -1$, $h(1) = 1$. Navíc h je spojitá funkce (rozdíl dvou spojitých). Pak z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot existuje $x_0 \in (0, 1)$ tak, že $h(x_0) = 0$. Tedy $0 = f(x_0) - g(x_0)$. Pak $f(x_0) = g(x_0)$.

2. Nechtě $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce.

(a) $\exists K > 0 \forall x \in [-1, 1] -Kx^2 \leq f(x) \leq Kx^2 \Rightarrow$ existuje $f'(0)$.

Řešení:

Ze dvou políciatů máme $f(0) = 0$. Dále

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

Dále odhadneme

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{Kx^2}{x} \right| = |Kx|$$

Ze dvou políciatů pak plyne

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} |Kx| = 0.$$

Odtud pak $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ a tedy $f'(0)$ existuje.

(b) Existuje $f'(0) \Rightarrow \exists K > 0 \forall x \in [-1, 1] -Kx^2 \leq f(x) \leq Kx^2$

Řešení: Neplatí. Protipříklad: $f = x$. Pak $f'(0) = 1$, ale není pravda, že $-Kx^2 \leq x \leq Kx^2$.

To by totiž pro $x > 0$ a pro nějaké K platilo $1 < Kx$, neboli $\frac{1}{x} < K$ pro $x \in [-1, 1]$, což je spor.

3. Nechtě $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce.

(a) $\exists f'(0) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \delta > 0$, že f je omezená na $(-\delta, \delta)$?

Řešení: Pravda. Má-li funkce vlastní derivaci, tak je v tomto bodě spojitá. Tedy f je spojitá v 0. Dále máme větu, že má-li funkce vlastní limitu (což má, ze spojitosti), tak existuje δ okolí, na kterém je funkce omezená. (Přímo plyne z definice limity.)

- (b) $\exists f'(0) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \exists \delta > 0$, že f je omezená na $(-\delta, \delta)$?

Řešení: Neplatí. Uvažujte funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Ale funkce je neomezená na okolí 0.

4. (a) Dokažte, že existuje funkce $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že existuje vlastní limita $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$, existuje $f'_+(0)$ a neplatí rovnost $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$.

Řešení: Uvažujme

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Pak $f'_+(0) = \infty$, ale $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1$.

- (b) Dokažte, že existuje funkce $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že existuje derivace $f'_+(0)$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (0, 1)$ a neexistuje $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$.

Řešení: Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak pro $x \in (0, 1)$ je

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Pak $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$ neexistuje. Uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{2\pi n}$. Pak $x_n \rightarrow 0+$. Navíc $f'(x_n) = -1$. Tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = -1$. Dále uvažujme posloupnost $y_n = \frac{1}{\pi + 2\pi n}$. Pak $y_n \rightarrow 0+$. Dále $f'(y_n) = 1$, tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(y_n) = 1$. Tedy z Heineho věty $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$ neexistuje.

Ale z věty o omezené a mizející

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

5. Rozhodněte, zda existuje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se spojitou druhou derivací na $\mathbb{R}$, která není ani konvexní ani konkávní na žádném intervalu v $\mathbb{R}$.

Řešení: Neexistuje. Nechť $f''(x) = 0$ pro všechna x . Pak $f'(x) = K$, kde $K \in \mathbb{R}$ a $f(x) = Kx + L$, kde $L \in \mathbb{R}$. Taková funkce je konvexní i konkávní na celém $\mathbb{R}$.

Nechť tedy existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $f''(x_0) \neq 0$. BÚNO $f''(x_0) > 0$. Protože $f''(0)$ je spojitá, tak existuje δ okolí, takové, že $f''(x) > 0$ na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Pak ale z Věty o vztahu druhé derivace a konvexity či konkávnosti plyne, že funkce je konvexní na $(x - \delta, x + \delta)$.