



21. cvičení – Taylorův polynom – limity

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

Řešení: Taylorův rozvoj:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(Šlo by i provést dvakrát l'Hospitalovo pravidlo.)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{3}$

Řešení: Sledujte výpočet.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - x - x^2}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = -\frac{1}{12}$

Řešení: Sledujte výpočet.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{4} + o(x^5))}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4!} - \frac{1}{4} \frac{1}{2!} + \frac{o(x^5)}{x^4} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + 0 = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = 0$

Řešení: Převědeme na společný jmenovatel a rozvineme funkci sinus v čitateli.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^3/3! + o(x^4) - x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \\ &\stackrel{AL}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} + \frac{o(x^4)}{x^2} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{3!} + \frac{o(x^4)}{x^4} \cdot x^2 \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \stackrel{AL}{=} (0 + 0 \cdot 0) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \frac{19}{90}$$

Řešení: Čitatel musíme rozvést do pátého řádu. Platí, že

$$\begin{aligned} \sin(\sin x) &= \sin\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^5 + o(x^6) = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) - \frac{1}{3!}\left(x^3 - 3x^2 \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6) \end{aligned}$$

Odtud vyplývá

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6) - x(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^6))}{x^5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{10}x^5 + o(x^6) + \frac{1}{9}x^5 + o(x^6)}{x^5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = \frac{19}{90}. \end{aligned}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3 \cos x - 4}{\arctan^3 x} = \frac{4}{3}$$

Řešení: Nejprve použijeme známou limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = 1.$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3 \cos x - 4}{\arctan^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3 \cos x - 4}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\arctan^3 x}$$

Druhý zlomek jde do 1. První limitu spočteme pomocí Taylora.

Rozvineme čitatel do třetího řádu. Dostaneme

$$\begin{aligned} e^{x^2+x} - \sin x + 3 \cos x &= 1 + (x^2+x) + \frac{(x^2+x)^2}{2!} + \frac{(x^2+x)^3}{3!} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + 3\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) - 4 + o(x^3) \\ &= 2\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3 \cos x - 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{4}{3} + 0.$$

Hledaná limita je tedy rovna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3 \cos x - 4}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\arctan^3 x} \stackrel{AL}{=} \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x} = \frac{1}{9}$$

Řešení: Podle základních limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

napišeme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)^2}{(\cos x - 1)^2} \cdot \frac{x^4}{\sin^4 x} \cdot \frac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{x^8}$$

Poslední zlomek vyřešíme Taylorem. Rozvineme čitatel

$$e^{x^2} - 1 = 1 + x^2 - 1 + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \implies (\sin x - x)^2 = \frac{x^6}{36} + o(x^6)$$

a dohromady dostaneme

$$(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2 = \frac{x^8}{36} + o(x^8)$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{36}x^8 + o(x^8)}{x^8} = \frac{1}{36}.$$

Pro původní limitu pak máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)^2}{(\cos x - 1)^2} \cdot \frac{x^4}{\sin^4 x} \cdot \frac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{x^8} \stackrel{AL}{=} 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \ln^2 a, \quad a > 0$$

Řešení: Protože platí $a^x = e^{x \ln a}$, je

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2)$$

$$a^{-x} = e^{-x \ln a} = 1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2)$$

a dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + 1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a - 2 + o(x^2)}{x^2} = \ln^2 a.$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cotg x \right) = \frac{1}{3}$$

Řešení: Nejprve převedeme na společný jmenovatel, pak rozvineme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cotg x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} =$$

Díky známým limitám víme, že jmenovatel se chová jako x^3 , tedy budeme rozvíjet do třetího řádu.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)) - x(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3))}{x^2 \sin x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x + \frac{x^3}{2!} + o(x^4)}{x^2 \sin x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^3} \right) \cdot \frac{x}{\sin x} \stackrel{AL}{=} \left(\frac{1}{3} + 0 \right) \cdot 1 = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = 2$

Řešení:

Rozvojem do 3. řádu

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x^3/6 + o(x^3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{1/6 + \frac{o(x^3)}{x^3}} \stackrel{AL}{=} \left(\frac{1}{3} + 0 \right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{6} + 0} \right) = 2
 \end{aligned}$$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(e^x - 1)(e^{-x^2} - 1)^2} = -\frac{1}{4}$

Řešení:

Protože

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{(-x^2)} = 1,$$

dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(e^x - 1)(e^{-x^2} - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{x \cdot (-x^2)^2} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{(-x^2)^2}{(e^{-x^2} - 1)}$$

První zlomek rozvineme do 5. řádu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - (x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5)) + x^3 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{4}.$$

Dohromady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{x \cdot (-x^2)^2} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{(-x^2)^2}{(e^{-x^2} - 1)} \stackrel{AL}{=} -\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{4}.$$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2 \sin x - \arctan x - x} = -\frac{1}{11}$

Řešení: Z definice Taylorova polynomu můžeme odvodit, že platí

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

Odtud dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2 \sin x - \arctan x - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 \right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \right) - x + o(x^6)}{2 \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) - x + o(x^6)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{20}x^5 - \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)}{\frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{-11}{60}} = -\frac{1}{11}.\end{aligned}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Řešení: Čitatel musíme rozvést do třetího řádu. Platí, že

$$\begin{aligned}(\cos x)^{\sin x} &= e^{\sin x \ln(\cos x)} = e^{(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) \cdot (\ln(1 - x^2/2 + o(x^3)))} = \\ &= e^{(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) \cdot (-x^2/2 + o(x^3))} = e^{-x^3/2 + o(x^3)} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\end{aligned}$$

a tudíž

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - x^3/2 + o(x^3))}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Bonus

2. Určete, zda je pravda: Má - li funkce derivace všech řádů a Taylorova řada konverguje, tak už konverguje k původní funkci.

Řešení: Nikoli. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak $T_n^{f,0} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tedy Taylorův polynom aproximuje funkci pouze v 0.

3. Zjistěte, zda je 0 inflexním bodem funkce $\sin x + \sinh x$.

Řešení: Zdroj: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>

Prve zjistíme 2. derivaci.

$$f''(x) = -\sin x + \sinh x$$

Rozvineme do Taylorova polynomu 5. stupně:

$$\begin{aligned}-\sin x + \sinh x &= -\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ &= \frac{2x^3}{6} + o(x^5) = x^3 \left(\frac{1}{3} + o(x^2)\right).\end{aligned}$$

Odtud máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Tedy z definice limity existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\frac{f''(x)}{x^3} > \frac{1}{6} \quad x \in P(0, \delta).$$

Ale odtud je $f''(x) < 0$ na $P^-(0, \delta)$ a $f''(x) > 0$ na $P^+(0, \delta)$.

Závěr: Podle postačující podmínky pro inflexi má funkce f v bodě 0 inflexní bod.

4. Zjistěte, pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + Cx^4$ lokální maximum v bodě 0.

Řešení: Zdroj: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>

Rozvineme do Taylora v bodě 0. Máme

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6), \\ e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + o(x^6).\end{aligned}$$

Celkem

$$f(x) = x^4 \left(\frac{12C - 1}{12} \right) + \frac{14x^6}{720} + o(x^6).$$

Označme $a = \frac{12C-1}{12}$. Jestliže je $C > \frac{1}{12}$, tak je $a > 0$. Dále můžeme psát

$$f(x) = x^4 \left(a + \frac{14x^2}{720} + o(x^2) \right)$$

Navíc platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} a + \frac{14x^2}{720} + o(x^2) = a.$$

Tedy z definice limity existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\frac{f(x)}{x^4} > \frac{a}{2}, \quad x \in P(0, \delta).$$

Odtud $f(x) > 0$ na $P(0, \delta)$. Navíc $f(0) = 0$. Tedy f má v bodě 0 lokální minimum.

Pro $C < \frac{1}{12}$ analogicky vyjde, že f má v 0 lokální maximum.

Případ $C = \frac{1}{12}$: Z rozvoje máme

$$f(x) = \frac{14x^6}{720} + o(x^6) = x^6 \left(\frac{14}{720} + o(1) \right).$$

Analogicky jako výše pak vyjde v 0 lokální minimum.