



19. cvičení – Průběh funkce 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1. Uvažujte funkci $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zadanou předpisem

$$\begin{cases} \frac{x^2 \log x}{e^{2x}}, & x \in (0, \infty), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Rozhodněte, zda je funkce spojitá na $[0, \infty)$.

Řešení: Na intervalu $(0, \infty)$ je funkce spojitá dle věty o aritmetice a spojitosti.

Pro $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 \log x}{e^{2x}} \stackrel{VOAL}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \log x \lim_{x \rightarrow 0+} e^{-2x} = 0 \cdot 1,$$

neboť

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \log x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log x}{x^{-2}} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = 0.$$

Závěr: protože limita se rovná funkční hodnotě, funkce je spojitá v 0 zprava, tedy funkce je spojitá na $[0, \infty)$.

- (b) Rozhodněte, zda existuje $f'_+(0)$, a pokud ano, spočtěte ji.

Řešení: Zderivujeme z definice:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x \log x}{e^{2x}} \stackrel{VOAL}{=} 0 \cdot 1,$$

neboť

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Závěr: $f'_+ = 0$.

- (c) Rozhodněte, zda má funkce f asymptotu v ∞ , a pokud ano, určete ji.

Řešení:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \log x}{e^{2x}} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x + 1}{2e^{2x}} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{4e^{2x}} = 0.$$

dále

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \log x}{e^{2x}} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \log x + x}{2e^{2x}} \\ &\stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \log x + 2 + 1}{4e^{2x}} \stackrel{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{8e^{2x}} = 0. \end{aligned}$$

Závěr: asymptota existuje a je tvary $y = 0$.

- (d) Rozhodněte, zda existuje $a \in (0, \infty)$ takové, že funkce f je monotónní na intervalu (a, ∞) .

Řešení: Na intervalu $x \in (0, \infty)$ máme

$$f'(x) = -2e^{-2x}x^2 \log x + e^{-2x}(2x \log x + x) = e^{-2x}x(2(1-x) \log(x) + 1).$$

Přímo najít nulový bod bude obtížné, spočteme tedy limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2(1-x) \log x + 1 \stackrel{VOAL}{=} \infty(-\infty) + 1 = -\infty.$$

Protože limita se rovná $-\infty$, musí z definice limity existovat takové $a \in (0, \infty)$, že $f' < 0$ na (a, ∞) .

Tedy podle věty o derivaci a monotonii je f klesající na (a, ∞) . (A tedy monotónní.)

- (e) Rozhodněte, zda existuje $b \in (0, \infty)$ takové, že funkce f je konkávní na intervalu $(0, b)$.

Řešení: Na $(0, \infty)$

$$f''(x) = -2e^{-2x}(-2x^2 \log x + 2x \log x + x) + e^{-2x}(-4x \log x - 2xx + 2 \log x + 2 + 1) = e^{-2x}(4x^2 \log x - 8x \log x - 4x + 2 \log x + 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (4x^2 \log x - 8x \log x - 4x + 2 \log x + 3) \stackrel{VOAL}{=} 0 - 0 - 0 - \infty + 3 = -\infty.$$

Tedy z definice limity musí existovat $b \in (0, \infty)$ takové, že $f'' < 0$ na $(0, b)$.

Podle věty o druhé derivaci a je tedy f konkávní na $(0, b)$.

2. Uvažujte funkci f definovanou předpisem

$$\begin{cases} \arcsin\left(\frac{2 \log x}{1 + \log^2 x}\right), & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Ukažte, že je funkce f dobře definovaná.

Řešení: Musí platit

$$-1 \leq \frac{2 \log x}{1 + \log^2 x} \leq 1,$$

neboli

$$-1 - \log^2 x \leq 2 \log x \leq 1 + \log^2 x.$$

Při substituci $t = \log x$ píšeme

$$-1 - t^2 - 2t \leq 0, \quad 2t - 1 - t^2 \leq 0.$$

Lze přepsat na

$$-(t+1)^2 \leq 0, \quad -(t-1)^2 \leq 0,$$

což ale platí pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a po odsubstituování pro $x \in (0, \infty)$.

- (b) Rozhodněte, ve kterých bodech $x \in [0, \infty)$ existují jednostranné derivace funkce f a pro tyto body je spočtěte.

Řešení: Mechanicky zderivujeme na $(0, \infty) \setminus \{e, \frac{1}{e}\}$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4 \log^2 x}{(\log^2 x + 1)^2}}} \cdot \frac{\frac{2}{x}(\log^2 x + 1) - 2 \log x \cdot \frac{2}{x} \log x}{(\log^2 x + 1)^2} = -2 \frac{\operatorname{sgn}(\log^2 x - 1)}{x(\log^2 x + 1)}$$

Protože funkce f je na $(0, \infty)$ spojitá (složení a aritmetika spojitých funkcí), najdeme derivace v e a $1/e$ z věty o limitě derivace:

$$\begin{aligned}f'_+(e) &= \lim_{x \rightarrow e+} f'(x) = -\frac{1}{e} \\f'_-(e) &= \lim_{x \rightarrow e-} f'(x) = \frac{1}{e} \\f'_+(1/e) &= \lim_{x \rightarrow 1/e+} f'(x) = e \\f'_-(1/e) &= \lim_{x \rightarrow 1/e-} f'(x) = -e\end{aligned}$$

V bodě 0 najdeme derivaci zprava z definice:

$$\begin{aligned}f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arcsin\left(\frac{2 \log x}{1 + \log^2 x}\right)}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} -2 \frac{\operatorname{sgn}(\log^2 x - 1)}{x(\log^2 x + 1)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0+} -2 \frac{1}{x(\log^2 x + 1)} = -\infty.\end{aligned}$$

(c) Určete intervaly monotonie funkce f .

Řešení: Ze znaménka první derivace máme:

- f klesá na $(0, 1/e)$ a (e, ∞) ,
- f roste na $(1/e, e)$.

(d) Určete obraz množiny $[0, e]$ při zobrazení f .

Řešení: Funkce je spojitá v 0 zprava (je potřeba upočítat) a její hodnota je tam $f(0) = 0$. Na intervalu $(0, 1/e)$ klesá, $f(1/e) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Na intervalu $(1/e, e)$ roste, $f(e) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

Závěr: $f([0, e]) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(e) Určete intervaly konvexity a konkavity funkce f .

Řešení: Mechanicky zderivujeme na $(0, \infty) \setminus \{e, \frac{1}{e}\}$.

$$f''(x) = \frac{2(\log x + 1)^2}{x^2(\log^2 x + 1)^2} \operatorname{sgn}(\log^2 x - 1)$$

Ze znaménka druhé derivace plyne, že funkce je konkávní na $(1/e, e)$ a konvexní na $(0, 1/e)$ a (e, ∞) .

3. Uvažujte funkci $f(x) = \sqrt{|\sin x|} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

(a) Nalezněte body maxima a minima funkce f , pokud existují.

Řešení: Úvodní rozbor:

- Funkce je spojitá na $\mathbb{R}$ (složení a součin spojitých funkcí).
- Funkce je periodická s periodou $T = 4\pi$.
- Funkci rozepíšeme na

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\sin x} \cos \frac{x}{2}, & x \in (0, \pi) + 2k\pi, \\ 0, & x = 0 + k\pi, \\ \sqrt{-\sin x} \cos \frac{x}{2}, & x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi. \end{cases}$$

Nyní mechanicky zderivujeme. Prve uvažujme interval $(0, \pi) + 2k\pi$. Pak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cos x \cos \frac{x}{2} + \sqrt{\sin x} \left(-\sin \frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\cos x \cos \frac{x}{2} + |\sin x| \left(-\sin \frac{x}{2}\right)}{\sqrt{\sin x}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cos x \cos \frac{x}{2} - \sin x \sin \frac{x}{2}}{\sqrt{\sin x}} = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{3x}{2}}{\sqrt{\sin x}}. \end{aligned}$$

Na intervalu $(\pi, 2\pi) + 2k\pi$ postupujeme analogicky a dostaneme

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{3x}{2}}{\sqrt{\sin x}}, & x \in (0, \pi) + 2k\pi, \\ -\frac{1}{2} \frac{\cos \frac{3x}{2}}{\sqrt{-\sin x}}, & x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi. \end{cases}$$

Nulové body - řešíme rovnici $\cos \frac{3x}{2} = 0$, neboli

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Výsledek $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$. (Pozor, některé z těchto bodů vyšly ve zlomových bodech $0 + k\pi$.)

Při porovnání znamének první derivace pak vyjde

- f je rostoucí na $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 2\pi)$, $(7\pi/3, 11\pi/3)$,
- f je klesající na $(\pi/3, 5\pi/3)$, $(2\pi, 7\pi/3)$, $(11\pi/3, 4\pi)$.

Z toho pak vyjdou extrémy v bodech:

- lok. maximum: $\{\pi/3, 2\pi, 11\pi/3\}$.
- lok. minimum: $\{0, 5\pi/3, 7\pi/3\}$.

(b) Určete obor hodnot funkce f .

Řešení: Jelikož funkce je spojitá (tedy nabývá mezhodnot), máme $H_f = [f(5\pi/3), f(\pi/3)] = \left[-\frac{3^{3/4}}{2\sqrt{2}}, \frac{3^{3/4}}{2\sqrt{2}}\right]$.

(c) Existuje otevřený interval I obsahující bod $\frac{\pi}{2}$, na kterém je funkce f konvexní?

Řešení: Zderivujme funkci na intervalu $(0, \pi)$:

$$f'' = \frac{-3 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin(x) - \cos(x) \cos\left(\frac{3x}{2}\right)}{4 \sin(x) \sqrt{\sin(x)}}.$$

Máme tedy

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-3}{\sqrt{2}}.$$

Protože f'' je spojitá na $(0, \pi)$, tak existuje interval (a, b) , $\frac{\pi}{2} \in (a, b)$ takový, že $f'' < 0$ na (a, b) . Tedy f je na (a, b) konkávní.

Závěr: hledaný interval pro konvexitu neexistuje.

4. Uvažujte funkci f zadanou předpisem

$$\begin{cases} (x^2)^{\sin x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Najděte intervaly, kde je funkce f spojitá.

Řešení: Prve funkci přepíšeme na

$$\begin{cases} e^{(\sin x) \ln x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ je funkce spojitá z vět o aritmetice a skládání spojitých funkcí.

V bodě 0 spočteme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x \ln x^2} = e^0 = 1,$$

protože

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x \ln x^2 = 1 \cdot 0.$$

(Druhou limitu lze upočítat l'Hospitalem.)

Limita se tedy rovná funkční hodnotě a funkce je spojitá v 0. Závěr: funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$.

- (b) Spočtěte $f'(0)$, pokud existuje.

Řešení: Prve spočteme f' na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

$$f' = x^{2 \sin(x)} \left(\cos x \ln(x^2) + \frac{2 \sin(x)}{x} \right)$$

Protože funkce je spojitá v 0, lze aplikovat větu o limitě a derivaci, tedy

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} = e^{\sin x \ln x^2} \left(\cos x \ln(x^2) + \frac{2 \sin(x)}{x} \right) \\ &\stackrel{VOAL}{=} 1(1 \cdot (-\infty) + 2) = -\infty. \end{aligned}$$

Analogicky vyjde i $f'_-(0) = -\infty$.

Závěr: $f'(0) = -\infty$.

- (c) Rozhodněte, zda existuje $\delta > 0$ takové, že funkce f je rostoucí na intervalu $(-\delta, \delta)$.

Řešení: Protože $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = -\infty$, musí existovat okolí $P_\eta(0)$, že $f'' < 0$ na $P_\eta(0)$.

Díky větě o monotonii ale máme, že f je klesající na $(-\eta, 0)$ a na $(0, \eta)$. Tedy není možné, aby f byla rostoucí na nějakém intervalu $(-\delta, \delta)$.

- (d) Rozhodněte, zda existuje $\xi > 0$ takové, že funkce f je monotónní na intervalu (ξ, ∞) .

Řešení: Uvažujme první derivaci

$$f'(x) = e^{\sin x \ln x^2} \left(\cos x \ln(x^2) + \frac{2 \sin(x)}{x} \right).$$

Pro všechna $x > 0$ platí

$$e^{\sin x \ln x^2} > 0.$$

Uvažujme pomocnou funkci

$$g(x) = \cos x \ln x^2 + \frac{2 \sin x}{x}$$

Pak speciálně v bodech $2k\pi$ je

$$g(2k\pi) = \cos 2k\pi \ln(2k\pi)^2 + \frac{2 \sin 2k\pi}{2k\pi} = \ln(2k\pi)^2 > 0.$$

Naopak

$$g(\pi + 2k\pi) = \cos(\pi + 2k\pi) \ln(\pi + 2k\pi)^2 + \frac{2 \sin(\pi + 2k\pi)}{\pi + 2k\pi} = -\ln(\pi + 2k\pi)^2 < 0.$$

Odtud plyne, že funkce f je rostoucí v bodech $2k\pi$ a klesající v bodech $\pi + 2k\pi$. Jelikož pro každé $\xi > 0$ existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $2k\pi > \xi$ tak není možné, aby funkce f byla monotónní na nějakém intervalu (ξ, ∞) . Protože pokud by byla rostoucí (resp. neklesající), musela by být rostoucí (neklesající) i v bodech $\pi + 2k\pi$, což je ve sporu se zápornou derivací v těchto bodech.

Analogicky kdyby f byla klesající (nerostoucí), musela by být klesající (nerostoucí) i v bodech $2k\pi$, což je spor s kladnou derivací.

Závěr: Takové ξ neexistuje.

Bonus

Definice 1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je *rostoucí v bodě* a , pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) < f(a)$ pro všechna $x \in P_-(a, \delta)$ a $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta)$.

Věta 2. Má-li reálná funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ kladnou (resp. zápornou) derivaci zprava, pak je v tomto bodě rostoucí (resp. klesající) zprava.

5. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že f je rostoucí v bodě 0, ale není monotónní na žádném intervalu $(-\delta, \delta)$.

Řešení: Příklad is řešením máme z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme

$$f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{1}{x^2} + x^2 \cos \left(\frac{1}{x^2} \right) (-2) \frac{1}{x^3} = 1 + 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

V bodě 0 spočteme derivaci z definice:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x \sin \frac{1}{x^2} \stackrel{AL}{=} 1 + 0 = 1.$$

Přičemž na poslední limitu jsme použili větu o limitě omezené a mizející.

Z věty tedy plyne, že funkce je rostoucí v bodě 0.

Nyní uvažujme body $x_n = (\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n})^{-1}$ a $y_n = (\sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n})^{-1}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak zřejmě $x_{n+1} < y_n < x_n$. Navíc máme

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)}} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)}} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)} \\ f(y_n) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}} + \frac{1}{(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n)} \sin\left(3\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}} - \frac{1}{(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n)} \\ f(x_n) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} + \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \end{aligned}$$

Odtud (lze upočítat)

$$f(y_n) < f(x_n) \quad \text{a} \quad f(y_n) < f(x_{n+1}).$$

Dále máme $x_n \rightarrow 0$ a $y_n \rightarrow 0$. Tedy funkce f nemůže být monotónní na žádném okolí 0.

