17. cvičení – L'Hospital + Heine

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limity. Nezapomeňte na Heineho a na fakt, že ne vždy L'Hospital pomůže.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{60}+3x-4}{x^{40}-2x+1}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{60}+3x-4}{x^{40}-2x+1} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{60x^{59}+3}{40x^{39}-2} = \frac{63}{38}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\pi}{2}-\arccos x}{x}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}-\arccos x}{x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}$

Řešení: (Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x-\sin x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1+1}{1^2} = 2.$$

(d) $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}$

Řešení:

Budeme prve počítat limitu funkce, pomocí L'Hospitalova pravidla typu "0/0".

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x-\sin x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1+1}{1^2} = 2.$$

Nyní použijeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, x_n je v definičním oboru funkce $\frac{\tan x - x}{x-\sin x}$, $x_n \neq 0$, $\lim \frac{1}{n} = 0$.
Odtud

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}} = 2.$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$

Prve přepíšeme

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x}$$

Limitu vnitřní funkce nyní spočteme pomocí L'Hospitala

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0.$$

Složením s vnější funkcí dostáváme

$$\lim_{x\to 0+} x^x = e^0 = 1$$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$

Řešení: (Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{3\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} \overset{VOAL}{=} \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} = 1,$$

kde druhou limitu jsme spočetli rozšířením

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-1+4x^2}{x^2(\sqrt{1-4x^2}+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2(\sqrt{1-4x^2}+\sqrt{1-x^2})} = \frac{3}{2}.$$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$

Řešení: Uvažujme nejprve limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log(1+\frac{3}{x})}$$

Máme vnější funkci $f(y) = e^y$, vnitřní funkci $x\log(1+\frac{3}{x})$. Spočteme limitu vnitřní funkce:

$$\lim_{x\to\infty} x\log(1+\frac{3}{x}) = \lim_{x\to\infty} 3\frac{\log(1+\frac{3}{x})}{3\cdot\frac{1}{x}} \overset{AL}{=} 3\cdot 1 = 3.$$

Pak počítáme limitu vnější funkce

$$\lim_{y\to 3} e^y = e^3.$$

Limita celkem:

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\log(1+\frac{3}{x})} = e^3$$

VOLSF 1: vnější funkce $f(y) = e^y$, vnitřní funkce $x\log(1+\frac{3}{x})$. Limity viz výše. Podmínka (S): e^y je spojitá v 3.

VOLSF 2: vnější funkce $f(y) = \frac{\log(1+y)}{y}$, vnitřní funkce $g(x) = \frac{3}{x}$. Dále $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x} = 0$, $\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1$. Podmínka (P): $\frac{3}{x} \neq 0$ pro $x \in P(\infty, 1)$.

Nyní limita původní posloupnosti. Z Heineho: $x_n = n$, $x_n \to \infty$, $x_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pak

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3$$

Jiná možnost: Funkce $(1+3x)^{1/x}$, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0+$, $\frac{1}{n} \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2\sin x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x\sin x + x^2\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{2\sin x + x\cos x} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Druhá limita se opět vyřeší L'Hospitalovým pravidlem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2\sin x + x\cos x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \frac{1}{2+1+0} = \frac{1}{3}.$$

(i) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2}$

Řešení:

Budeme uvažovat limitu funkce:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2(x+1)}{(x-1)^2} \overset{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\ln(x+1)}{x+1}}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)(x-1)} \overset{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{2x} = 0.$$

Z Heineho, $x_n = x$, $x_n \to \infty$, $x_n \neq \infty\, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2} = 0.$$

Nyní ze dvou policajtů nebo z věty o omezené a mizející máme i, že

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2} = 0.$$

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$

Řešení: (Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{cotg} x - 1}{x^2} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotg} x - \frac{x}{\sin^2}}{2x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cos x - x}{2x\sin^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin x\cos x - x}{2x^3} \overset{VOAL}{=} 1\cdot 1\cdot \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Pro druhou limitu máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cos x - x}{2x^3} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\cos - \sin x\sin x - 1}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{6x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1-\cos(2x)}{\frac{3}{2}(2x)^2} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}.$$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Řešení:

L'Hospitalem upočítat nejde. Vytkneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

(VOLSF na $\sqrt{y}$ a $1+\frac{1}{x^2}$, podmínka (S).)

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Řešení: Uvažujme limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \overset{AL}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

VOLSF $f(y) = \sqrt{y}$, $g(x) = 1+\frac{1}{x^2}$. Navíc $\lim_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$, $\lim_{y\to 1}\sqrt{y} = 1$, podmínka (S): f je spojitá v 1. Tedy $\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$.

Heine: $x_n = n$, $x_n \to \infty$, $x_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Řešení: Z předchozího příkladu (Heine a VOLSF) máme

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$

Označme

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Uvažujme nyní původní limitu pro sudé členy, tedy $a_{2n} = b_{2n}$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (vybrané z b_n) máme

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1.$$

Pro liché členy, tedy $a_{2n+1} = -b_{2n+1}$ máme z věty o limitě vybrané posloupnosti (vybrané z b_n)

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1.$$

Tedy máme dvě posloupnosti vybrané z a_n, které mají odlišnou limitu. Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, což plyne z věty o limitě vybrané posloupnosti (vybrané z a_n) a jednoznačnosti limity.

(n) $\lim_{x\to 1-} \ln x \cdot \ln(1-x)$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1-} \ln x \cdot \ln(1-x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{-1}{x\ln^2 x}} = \lim_{x\to 1-} -x\ln x \frac{\ln x}{1-x}$$
$$\overset{VOAL}{=} -1\cdot 0\cdot(-1) = 0$$

(o) $\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)\dfrac{n^k}{e^{an}}$, $k\in\mathbb{N}$, $a>0$.

Řešení:

Neboť $\cos(n\pi) = (-1)^n$, musíme limitu nejprve roztrhnout. Budeme počítat jen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^{an}}.$$

Převedeme na funkci. Pak použijeme l'Hospitala typu "něco/∞". Použijeme jej k-krát. Opakovaně nutno ověřit podmínky l'Hospitala (vychází pořád stejně).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^{ax}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{kx^{k-1}}{ae^{ax}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{a^2e^{ax}} = \cdots \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)\cdots 2x}{a^{k-1}e^{ax}} \overset{L'H}{=}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{k!}{a^k e^{ax}} = \frac{k!}{a^k}\cdot 0 = 0.$$

Z Heineho pak i limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^{an}} = 0.$$

Po přidání kosinu získáme ze dvou policajtů výsledek

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)\frac{n^k}{e^{an}} = 0.$$

(p) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \overset{VOAL}{=} 1\cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Druhou limitu spočteme L'Hospitalem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1-x}{2x(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

(q) $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\,\operatorname{arctan}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\,\operatorname{arctan}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$, $a, b > 0$

Řešení: (Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left(\sqrt{a}\,\operatorname{arctan}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\,\operatorname{arctan}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)}{x\sqrt{x}} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sqrt{a}}{1+\frac{x}{a}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}\frac{1}{a} - \frac{\sqrt{b}}{1+\frac{x}{b}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}}\frac{1}{b}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{1+\frac{x}{a}} - \frac{1}{1+\frac{x}{b}}}{3x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{(1+\frac{x}{a})(1+\frac{x}{b})3x} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

2. Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = \frac{x\cos 2x \sin 3x}{x^2-\pi^2}$, $f(\pi) = -\frac{1}{2}$, spojitá v π.

   Řešení: Je potřeba vyšetřit, zda se limita v π rovná funkční hodnotě. Tedy

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x\cos 2x \sin 3x}{x^2-\pi^2} = \lim_{x\to\pi} \frac{x\cos 2x}{x+\pi} \cdot \frac{\sin 3x}{x-\pi} \overset{VOAL}{=} \frac{\pi}{2\pi} \cdot -3 = -\frac{3}{2}$$

   Druhou limitu jsme spočetli

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{x-\pi} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to\pi} \frac{3\cos 3x}{1} = -3.$$

   Závěr: funkce f není spojitá v π.

Bonus

3. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0+} e^{\sin x \ln(\cot x)}$$

Pro vnitřní funkci:

$$\lim_{x\to 0+} \sin x \ln(\cot x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\sin x}} \overset{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

Dohromady s VOLSF

$$\lim_{x\to 0+} e^{\sin x \ln(\cot x)} = e^0 = 1$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$$

Řešení: (Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)}$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2}}{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{1}{(2x+1)^2}$$

Z VOLSF

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi x}{2x+1}} = \pi.$$

Druhou limitu upočteme L'Hospitalem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(2x+1)^2}}{\cos\frac{\pi x}{2x+1}} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{(2x+1)^3}\cdot 2}{-\sin\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\frac{\pi}{(2x+1)^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\pi\sin\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{-4}{(2x+1)} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{-\pi\cdot 1}\cdot 0 = 0.$$

Závěr:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}$$

Řešení: (Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF)

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 1\cdot 0$$

Druhou limitu vyřešíme L'Hospitalem

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2} = 0.$$

(d)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Řešení: (Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF)
Prve přepíšeme

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)}$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) - \ln e}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$
$$\overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x(x+1)} = -\frac{1}{2}$$

Celé dohromady

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)} = e^{-\frac{1}{2}}$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n},$$

$c > 1$.

Řešení: Převedeme na funkci:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x\ln c}}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{c^x \ln c}{1} = \infty$$

Z Heineho plyne, že i původní limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n} = \infty.$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}}$$

Řešení:

Budeme počítat limitu funkce:

$$\lim_{x\to 0+} e^{(x\ln(\ln\frac{1}{x}))}$$

Tedy musíme spočíst

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(\ln\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\ln\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\ln\frac{1}{x}}x \overset{VOAL}{=} 0\cdot 0$$

Nyní použijeme Heineho, verze zprava: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, definiční obor je také ok. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

Zkouškové příklady

4. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^8 \left(2\cos\frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n^4}\right)$

Řešení: Použijeme Heineho: $x_n = \frac{1}{n^2}$, $x_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, definiční obor je také ok.

Budeme tedy počítat limitu funkce:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 2x}{4x^3} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 2}{12x^2} \lim_{x\to 0} \frac{2}{12} \frac{1-\cos x}{x^2}$$
$$\overset{VOAL}{=} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Závěr (z Heineho máme pro původní limitu):

$$\lim_{n\to\infty} n^8 \left(2\cos\frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{12}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{e^x - \sin x} - \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}}{\arcsin x - \sin x} = \dfrac{1}{2}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{e^x - \sin x} - \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}}{\arcsin x - \sin x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x - \sin x - 1 - \frac{x^2}{2}}{\arcsin x - \sin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^x - \sin x} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}}$$

Pro druhý zlomek máme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{e^x - \sin x} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}} \overset{AL}{=} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Pro první zlomek:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x - \sin x - 1 - \frac{x^2}{2}}{\arcsin x - \sin x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{e^x - \cos x - x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{e^x + \sin x - 1}{\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + \sin x}$$
$$\underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{e^x + \cos x}{\frac{2x^2+1}{\sqrt{(1-x^2)^5}} + \cos x} \overset{AL}{=} \frac{1+1}{\frac{2\cdot 0+1}{1} + 1} = 1.$$

Z aritmetiky limit pak pro celý příklad máme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x - \sin x - 1 - \frac{x^2}{2}}{\arcsin x - \sin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^x - \sin x} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}} \overset{AL}{=} 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Použili jsme VOLSF (lze i přímo ze spojitosti):

- $f(y) = y^{5/2}$, $g(x) = 1 - x^2$, $\lim_{x\to 0+} 1 - x^2 = 1$, $\lim_{y\to 1} y^{5-2} = 1$. Podm. (S): $y^{5/2}$ je spojitá v 1. Tedy $\lim_{x\to 0+}(1-x^2)^{5/2} = 1$.
- $f(y) = \sqrt{y}$, $g(x) = e^x - \sin x$, $\lim_{x\to 0+} e^x - \sin x = 1$, $\lim_{y\to 1} \sqrt{y} = 1$. Podm. (S): $\sqrt{y}$ je spojitá v 1. Tedy $\lim_{x\to 0+} \sqrt{e^x - \sin x} = 1$.
- $f(y) = \sqrt{y}$, $g(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$, $\lim_{x\to 0+} 1 + \frac{1}{2}x^2 = 1$, $\lim_{y\to 1} \sqrt{y} = 1$. Podm. (S): $\sqrt{y}$ je spojitá v 1. Tedy $\lim_{x\to 0+} \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2 = 1}$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\cos \frac{3}{n}}{\cos \frac{5}{n}} \right)^{n^2} = e^8$

Řešení: Použijeme Heineho: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, definiční obor je také ok.

Budeme tedy počítat limitu funkce:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos 3x}{\cos 5x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2} \log\left(\frac{\cos 3x}{\cos 5x}\right)}$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \log\left(\frac{\cos 3x}{\cos 5x} \right) &\overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos 5x}{\cos 3x} \cdot \frac{-3\sin 3x \cos 5x + 5 \sin 5x \cos 3x}{\cos^2 5x}}{2x} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos 3x \cos 5x} \cdot \left(3 \cdot \frac{-3x \sin 3x \cos 5x}{3x} + 5 \cdot \frac{5 \sin 5x \cos 3x}{5x} \right) \\
&\overset{AL}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} (-3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1) = 8
\end{aligned}$$

Složená funkce pak má:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2} \log\left(\frac{\cos 3x}{\cos 5x}\right)} = e^8$$

Závěr (z Heineho máme pro původní limitu):

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos \frac{3}{n}}{\cos \frac{5}{n}} \right)^{n^2} = e^8$$

Použili jsme VOLSF:

- $f(y) = e^y$, $g(x) = \frac{1}{x^2} \log \frac{\cos 3x}{\cos 5x}$, $\lim_{x\to 0} g(x) = 8$, $\lim_{y\to 8} e^y = e^8$. Podm. (S): e^y je spojitá v 8. Tedy $\lim_{x\to 0} f(g(x)) = e^8$.
- $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, $g(x) = 3x$, $\lim_{x\to 0} 3x = 0$, $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. Podm. (P): $3x \neq 0$ na $P(0,1)$. Tedy $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$.
- $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, $g(x) = 5x$, $\lim_{x\to 0} 5x = 0$, $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. Podm. (P): $5x \neq 0$ na $P(0,1)$. Tedy $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos \operatorname{arctan} \sqrt{n}}{\sin \operatorname{arccot} \sqrt{n}}$

Řešení: Použijeme Heineho: $x_n = \sqrt{n}$, $x_n \neq \infty$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, definiční obor je také ok.

Budeme tedy počítat limitu funkce:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos\arctan x}{\sin\operatorname{arccot} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arccot} x}{\sin\operatorname{arccot} x} \cdot \frac{\cos\arctan x}{\operatorname{arccot} x} =$$

Pro druhý zlomek platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos\arctan x}{\operatorname{arccot} x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{-\sin(\arctan x)\cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sin(\arctan x) = 1.$$

Dohromady tedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arccot} x}{\sin\operatorname{arccot} x} \cdot \frac{\cos\arctan x}{\operatorname{arccot} x} \overset{AL}{=} 1\cdot 1 = 1.$$

Závěr (z Heineho máme pro původní limitu):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\arctan\sqrt{n}}{\sin\operatorname{arccot}\sqrt{n}} = 1.$$

Použili jsme VOLSF:

- $f(y) = \sin^y$, $g(x) = \arctan x$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Podm. (S): $\sin^y$ je spojitá v $\frac{\pi}{2}$. Tedy $\lim_{x\to\infty} \sin(\arctan x) = 1$.
- $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, $g(x) = \operatorname{arccot} x$, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccot} x = 0$, $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. Podm. (P): $\operatorname{arccot} x \neq 0$ na $P(\infty,1)$. Tedy $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{arccot} x)}{\operatorname{arccot} x} = 1$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\sqrt{n^2+1}}$

Řešení: Použijeme Heineho, verze zprava: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0+$, definiční obor je také ok.

Budeme tedy počítat limitu funkce:

$$\lim_{x\to 0+} (1+\log(1+x))^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0+} e^{\log(1+\log(1+x))\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \log(1+\log(1+x))\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0+} \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{\log(1+\log(1+x))}{\log(1+x)}\cdot\frac{\log(1+x)}{\sqrt{x^2}} \\ &= \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{\log(1+\log(1+x))}{\log(1+x)}\cdot\frac{\log(1+x)}{x} \\ &\overset{AL}{=} 1\cdot 1\cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

Složená funkce pak má:

$$\lim_{x\to 0} e^{\log(1+\log(1+x))\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = e^1$$

Závěr (z Heineho máme pro původní limitu):

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\sqrt{n^2+1}} = e.$$

Použili jsme VOLSF:

- $f(y) = \frac{\log(1+y)}{y}$, $g(x) = \log(1+x)$, $\lim_{x\to 0+} \log(1+x) = 0$, $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$. Podm. (P): $\log(1+x) \neq 0$ na $P^+(0,1)$. Tedy $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\log(1+x))}{\log(1+x)} = 1$.
- $f(y) = e^y$, $g(x) = \log(1+\log(1+x))\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$, $\lim_{x\to 0+} g(x) = 1$, $\lim_{y\to 1} e^y = e$. Podm. (S): e^y je spojitá v 1. Tedy $\lim_{x\to 0+} e^{\log(1+\log(1+x))\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = e$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2)\frac{\cos x}{1+\sin x}$

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2)\frac{\cos x}{1+\sin x} &= \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} (2x+3\pi)(2x-3\pi)\frac{\cos x}{1+\sin x} \\ &\overset{AL}{=} \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} (2x+3\pi) \cdot \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} (2x-3\pi)\frac{\cos x}{1+\sin x}\end{aligned}$$

Druhou limitu spočteme pomocí L'Hospitalova pravidla

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{(2x-3\pi)\cos x}{1+\sin x} &\underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{2\cos x + (2x-3\pi)(-\sin x)}{\cos x} \\ &\underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{-2\sin x - 2\sin x + (2x-3\pi)(-\cos x)}{-\sin x} = \frac{2+2+0}{1} = 4.\end{aligned}$$

Dohromady máme

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} (2x-3\pi)\frac{\cos x}{1+\sin x} = 6\pi \cdot 4 = 24\pi$$

5. Sestrojte funkce f, g rostoucí a spojité na $\mathbb{R}$ takové, že $x^2 = f(x) - g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

   Řešení: Např. $-e^{-x}$ a $x^2 - e^{-x}$.

   Zkusíme to přes derivace. Jestliže $x^2 = f(x) - g(x)$, pak rovnost platí i po zderivování, tedy $2x = f'(x) - g'(x)$.

   Tedy $f'(x) = 2x + g'(x)$. Navíc potřebujeme, aby $f'(x) \geq 0$ a $2x + g'(x) \geq 0$, neboli. $g'(x) \geq -2x$.

   Nyní využijeme znalosti $e^x \geq x + 1$.

   Pak $g(x) = -e^{-x}$ i $f(x) = x^2 - e^{-x}$ jsou rostoucí a spojité a $f - g = x^2$.