16. cvičení – Derivace 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Spočtěte derivace (příp. jednostranné derivace) následujících funkcí

1. Zdroje: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf
   https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/MFF-NMMA101-1920/Cv22%20-%20Derivace%202.pdf
   https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF
   https://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html

   (a) $f(x) = \arccos(1 - x^2)$
   Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

   i. Definiční obor:
   $$-1 \leq 1 - x^2 \leq 1$$
   Tedy
   $$\begin{aligned} -2 &\leq -x^2, & -x^2 &\leq 0 \\ x^2 &\leq 2, & 0 &\leq x^2 \\ |x| &\leq \sqrt{2} & & \\ x &\in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] & & \end{aligned}$$
   Dohromady:
   $$D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

   ii. Derivaci složené funkce lze použít tam, kde
   $$-1 < 1 - x^2 < 1$$
   což jsou intervaly $(-\sqrt{2}, 0)$ a $(0, \sqrt{2})$.
   Tedy pro $x \in (-\sqrt{2}, 0)$ a $x \in (0, \sqrt{2})$ můžeme zderivovat:
   $$f' = \frac{-1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}(-2x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$$

   iii. Problematické body: $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$.
   Protože funkce f je v těchto bodech spojitá (příp. spojitá zleva/zprava), můžeme derivaci počítat pomocí věty o limitě derivací. Tedy máme

$$
\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2x}{x\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\
f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x\to 0-} \frac{2x}{-x\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x\to 0-} \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Tedy derivace $f'(0)$ neexistuje.
Dále (z Věty 4.2.7 ze skript)

$$
\begin{aligned}
f'_+(-\sqrt{2}) &= \lim_{x\to -\sqrt{2}+} f'(x) = \lim_{x\to -\sqrt{2}+} \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x\to -\sqrt{2}+} \frac{2x}{-x\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x\to -\sqrt{2}+} \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}} \\
&= -\infty \\
f'_-(\sqrt{2}) &= \lim_{x\to \sqrt{2}-} f'(x) = \lim_{x\to \sqrt{2}-} \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x\to \sqrt{2}-} \frac{2x}{x\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x\to \sqrt{2}-} \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Tedy: $D_{f'} = (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$.

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Řešení: Příklad i s řešením máme z: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf`

i. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}.$$

ii. Aritmetiku derivací a derivaci složené funkce lze použít tam, kde

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Tedy pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ máme

$$f' = 2x \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$$

iii. Problematické body: 0.
Derivaci spočteme z definice. (Věta o limitě omezené a mizející.)

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{h}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = 0$$

Tedy: $D_{f'} = \mathbb{R}$.

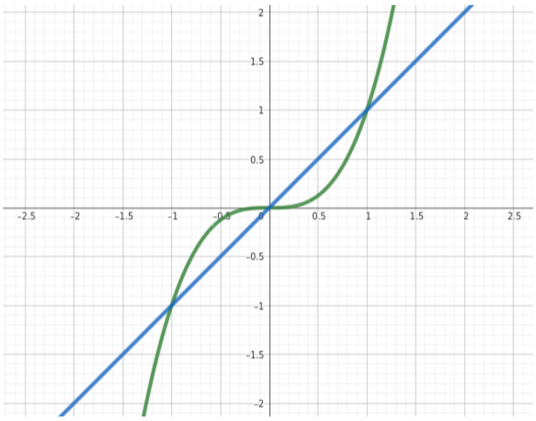
(c) $f(x) = \min\{x, x^3\}$

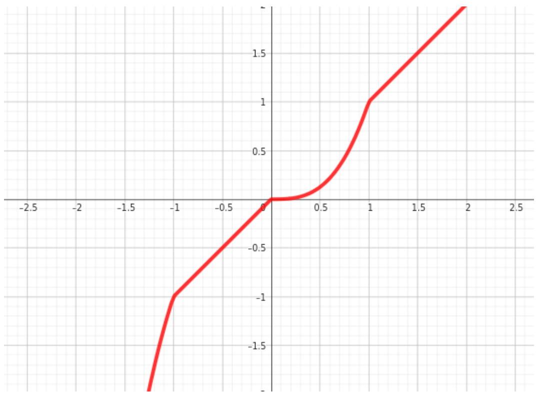
Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

i. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Funkci lze načrtnout:





Můžeme tedy psát

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, -1), \\ -1, & x = -1, \\ x, & x \in (-1, 0), \\ 0, & x = 0, \\ x^3, & x \in (0, 1), \\ 1, & x = 1, \\ x, & x \in (1, \infty), \end{cases}$$

ii. Na otevřených intervalech můžeme zderivovat. Můžeme tedy psát

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in (-\infty, -1), \\ 1, & x \in (-1, 0), \\ 3x^2, & x \in (0, 1), \\ 1, & x \in (1, \infty), \end{cases}$$

iii. Problematické body: $-1, 0, 1$.
Protože funkce je spojitá (vizte předchozí cvičení), můžeme použít větu o limitě derivací. Tedy

$$
\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} 3x^2 = 0\\
f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} 1 = 1\\
f'_+(-1) &= \lim_{x\to -1+} f'(x) = \lim_{x\to -1+} 1 = 1\\
f'_-(-1) &= \lim_{x\to -1-} f'(x) = \lim_{x\to -1-} 3x^2 = 3\\
f'_+(1) &= \lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim_{x\to 1+} 1 = 1\\
f'_-(1) &= \lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1-} 3x^2 = 3
\end{aligned}
$$

Tedy derivace v bodech $-1, 0, 1$ neexistují a $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

(d) $f(x) = x^2 e^{-|x-1|}$
Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/MFF-NMMA101-1920/Cv22%20-%20Derivace%202.pdf

i. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Můžeme psát

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-(x-1)}, & x \in (1, \infty),\\ 1, & x = 1,\\ x^2 e^{(x-1)}, & x \in (-\infty, 1), \end{cases}$$

ii. Na otevřených intervalech můžeme zderivovat. Tedy

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{-(x-1)} + x^2 e^{-(x-1)}(-1), & x \in (1, \infty),\\ 2xe^{(x-1)} + x^2 e^{(x-1)} \cdot 1, & x \in (-\infty, 1), \end{cases}$$

iii. Problematické body: 1.
Protože funkce je spojitá, můžeme použít větu o limitě derivací. Tedy

$$
\begin{aligned}
f'_+(1) &= \lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim_{x\to 1+} 2xe^{-(x-1)} + x^2 e^{-(x-1)}(-1) = 2 - 1 = 1\\
f'_-(1) &= \lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1-} 2xe^{(x-1)} + x^2 e^{(x-1)} \cdot 1 = 2 + 1 = 3
\end{aligned}
$$

Tedy derivace v bodě 1 neexistuje a $D_{f'} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

(e) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$
Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html

i. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}$$

ii. Derivaci složené funkce lze použít tam, kde

$$\sin x \neq 0$$

což jsou intervaly $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Tedy pro $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, můžeme zderivovat:

$$f' = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \cos x$$

iii. Problematické body: $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Protože funkce f je v těchto bodech spojitá, můžeme derivaci počítat pomocí věty o limitě derivací.
Protože $\cos(k\pi) = (-1)^k$, budeme rozlišovat sudá a lichá k. Pro sudé $k \in Z$ máme (z věty o podílu nulové funkce)

$$f'(k\pi) = \lim_{x \to k\pi} f'(x) = \lim_{x \to k\pi} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \cos x = \infty$$

Pro liché $k \in \mathbb{Z}$ máme (z věty o podílu nulové funkce)

$$f'(k\pi) = \lim_{x \to k\pi} f'(x) = \lim_{x \to k\pi} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \cos x = -\infty$$

Tedy: $D_{f'} = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$.

(f) $f(x) = \arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF

i. Definiční obor:

$$-1 \leq \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \leq 1$$

Tedy

$$\begin{aligned} -1 - x^2 &\leq 1 - x^2, & 1 - x^2 &\leq 1 + x^2 \\ -1 &\leq 1, & 0 &\leq 2x^2 \end{aligned}$$

Dohromady:

$$D_f = \mathbb{R}$$

ii. Derivaci složené funkce a aritmetiku derivací lze použít tam, kde

$$-1 < \frac{1 - x^2}{1 + x^2} < 1$$

což jsou intervaly $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
Tedy pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$. můžeme zderivovat:

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1 + x^2) - (1 - x^2)2x}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-1+2x^2-x^4}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-4x}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{1 + x^2}{2|x|} \cdot \frac{-4x}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{-2x}{|x|(1 + x^2)} \end{aligned}$$

iii. Problematické body: 0.

Protože funkce f je v tomto bodě spojitá, můžeme derivaci počítat pomocí věty o limitě derivací. Tedy máme

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{-2x}{|x|(1+x^2)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-2x}{x(1+x^2)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-2}{(1+x^2)} = -2$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{-2x}{|x|(1+x^2)} = \lim_{x\to 0-} \frac{-2x}{-x(1+x^2)} = \lim_{x\to 0-} \frac{2}{(1+x^2)} = 2$$

Tedy derivace $f'(0)$ neexistuje.

Tedy: $D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Zkouškové příklady

2. (a) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 + x - 2)(\arctan(x+2))^4$

Řešení: Příklad i s řešením máme od prof. Spurného https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma1.php

i. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}$$

Platí

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

Tedy můžeme psát

$$f(x) = \begin{cases} (\arctan(x+2))^4, & x \in (1, \infty), \\ 0, & x = 1, \\ -(\arctan(x+2))^4, & x \in (-2, 1), \\ 0, & x = -2, \\ (\arctan(x+2))^4, & x \in (-\infty, -2). \end{cases}$$

ii. Na otevřených intervalech můžeme zderivovat. Tedy

$$f'(x) = \begin{cases} 4\arctan^3(x+2) \cdot \frac{1}{1+(x+2)^2}, & x \in (1, \infty), \\ -4\arctan^3(x+2) \cdot \frac{1}{1+(x+2)^2}, & x \in (-2, 1), \\ 4\arctan^3(x+2) \cdot \frac{1}{1+(x+2)^2}, & x \in (-\infty, -2). \end{cases}$$

iii. Problematické body: $-2, 1$.

Protože funkce f je v bodě -2 spojitá, můžeme derivaci počítat pomocí věty o limitě derivací. Tedy máme

$$f'_+(-2) = \lim_{x\to -2+} f'(x) = \lim_{x\to -2+} -4\arctan^3(x+2) \cdot \frac{1}{1+(x+2)^2} = 0$$
$$f'_-(-2) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to -2-} 4\arctan^3(x+2) \cdot \frac{1}{1+(x+2)^2} = 0$$

Tedy derivace $f'(-2) = 0$.

Derivaci v bodě 1 budeme počítat z definice. (Použijeme větu o limitě při dělení 0.)

$$f'_{+}(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{(\arctan(x+2))^4 - 0}{x-1} = \infty$$
$$f'_{-}(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{-(\arctan(x+2))^4 - 0}{x-1} = \infty$$

Tedy derivace $f'(1) = \infty$.

Tedy: $D_{f'} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Příklady (2b)-(2g) i s řešením máme od doc. Zeleného: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/fsv/mat1/pisemky/m1-97-98.pdf

(b) $f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\tan^2 x\right), & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\pi}{2}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$

(c) $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$

(d) $f(x) = \max\left\{\min\left\{\cos x, \frac{1}{2}\right\}, -\frac{1}{2}\right\}$

(e) $f(x) = \arccos \dfrac{1}{1+x^2}$

(f) $f(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(g) $f(x) = \max\{x + 4\arctan(\sin x), x\}$

Bonus

3. Uvažujte funkce $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{4}, & x = 0, \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$

   Ukažte, že

   (a) $f'(0)$ a $g'(0)$ existují, ale $(f+g)'(0)$ neexistuje.

   (b) výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ má smysl, ale $(fg)'(0)$ neexistuje.

4. Nechť $f(x) = 1$ a $g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$

   Ukažte, že výraz $\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$ má smysl, ale $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$ neexistuje.

5. Nechť $f(y) = |y|$ a $g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$

   Ukažte, že výraz $\frac{f'(g(0))g'(0)}{g^2(0)}$ má smysl, ale $(f(g))'(0)$ neexistuje.

6. Najděte taková $a, b \in \mathbb{R}$, aby funkce byla diferencovatelná (vlastní dce) v každém $x \in \mathbb{R}$:

   $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1. \end{cases}$

7. Kde dělá tazatel chybu?

   Pochází z: https://math.stackexchange.com/questions/1532014/how-to-apply-the-definition-of-a-derivative-with-a-piecewise-function

Z (1) a (2) plyne $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n+1)}{n^2} = 0$. Odtud, z (3) a z věty o aritmetice limit plyne

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot (\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}) = \frac{1}{2}.$$

Příklad B2 : Použijeme Lebnizova kritéria. Ověřme jeho předpoklady:

(1) řada má požadovaný tvar,
(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{3} - 1) = 0$,
(3) $\forall n \in \mathbb{N}: \ \sqrt[n]{3} - 1 \geq \sqrt[n+1]{3} - 1$ (lze snadno odvodit ze zřejmé nerovnosti $3^{n+1} \geq 3^n, \ n \in \mathbb{N}$).

Řada tedy konverguje.

Příklad B3 : Pišme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}.$$

Víme, že $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$. Zabývejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} - \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{\arcsin x}{x} = 2 - 1 = 1.$$

Použili jsme

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
(3) $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
(4) sin je prostá funkce na jistém okolí 0,
(5) arcsin je prostá funkce,
(6) $x \mapsto 2x$ je prostá funkce,
(7) větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
(8) větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

2b

Příklad B4 : Funkce arctg i tg mají derivace všude ve svém definičním oboru. Máme tedy

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^4 x} \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad x \neq \pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z};$$

po úpravě dostaneme

$$f'(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x}; \qquad x \neq \pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

2b

Platí také $\lim_{x\to\pi/2+k\pi} f(x) = \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$, a f je tedy spojitá v každém bodě tvaru $\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Spočtěme

$$\lim_{x\to\pi/2+k\pi} f'(x) = \lim_{x\to\pi/2+k\pi} \frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 0.$$

Věta o výpočtu derivace pomocí limity derivace tedy dává (předpoklady jsou splněny!) $f'(\pi/2 + k\pi) = 0,\ k \in \mathbb{Z}$.

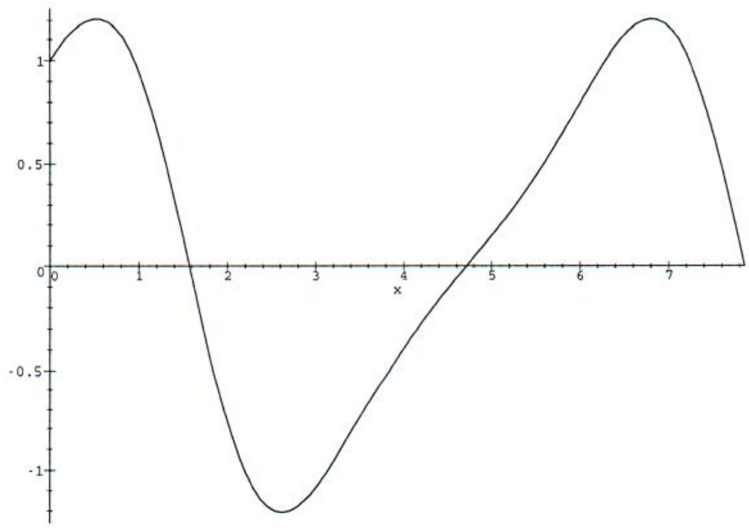
Příklad B5 : Snadno je vidět, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a f je 2π periodická a spojitá na $\mathbb{R}$. Spočtěme f':

$$f'(x) = e^{\frac{2}{3}\sin x}(\frac{2}{3}\cos^2 x - \sin x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Prozkoumáme-li znaménko f' obdržíme:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (5\pi/6, 13\pi/6) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi/6, 5\pi/6) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pi/6, 5\pi/6\} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Funkce f je tedy rostoucí na intervalech tvaru $(5\pi/6, 13\pi/6)+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Na intervalech tvaru $(\pi/6, 5\pi/6) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, je f klesající. Funkce f má v bodech $\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, globální maxima a v bodech $5\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, globální minima - toto vyplývá z výše uvedeného; $\mathcal{H}(f) = \langle f(5\pi/6), f(\pi/6)\rangle$. Funkce nemá žádné asymptoty.



Příklad D4 : Zřejmě $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x > 0$. Vzhledem k tomu, že $1 - e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tak pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}2x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} = e^{-x^2}\frac{x}{\sqrt{1-e^{x^2}}}.$$

V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}.$$

Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}$$

Uvědomme si, že

(1) $\lim_{y\to 0+}\frac{e^y-1}{y} = 1$,
(2) $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$,
(3) $-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(4) $\sqrt{\ }$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2} = 1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = 1.$$

Obdobně dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0-} -\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = -1.$$

Derivace funkce f v bodě 0 tedy neexistuje. Platí totiž $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

Příklad D5 : Snadno zjistíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkce f je sudá. Zkoumejme tedy funkci f zatím **pouze** na intervalu $(0, +\infty)$. Pak máme $f(x) = (\log x)^3 - 3\log x$.

Spočtěme limity v „krajních bodech“.

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\log x((\log x)^2 - 3) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to 0+}\log x((\log x)^2 - 3) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Pro každé $x > 0$ platí

$$f'(x) = \frac{3}{x}((\log x)^2 - 1) \qquad \text{a} \qquad f''(x) = \frac{3}{x^2}(-(\log x)^2 + 2\log x + 1).$$

Víme, že

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$,
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
(3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,
(4) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

Z ($\star$), (1)-(4) a z věty o aritmetice limit vyplývá

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2\sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} = 1 - \sqrt{3}.$$

2d

Příklad C4 : Pro funkci f platí

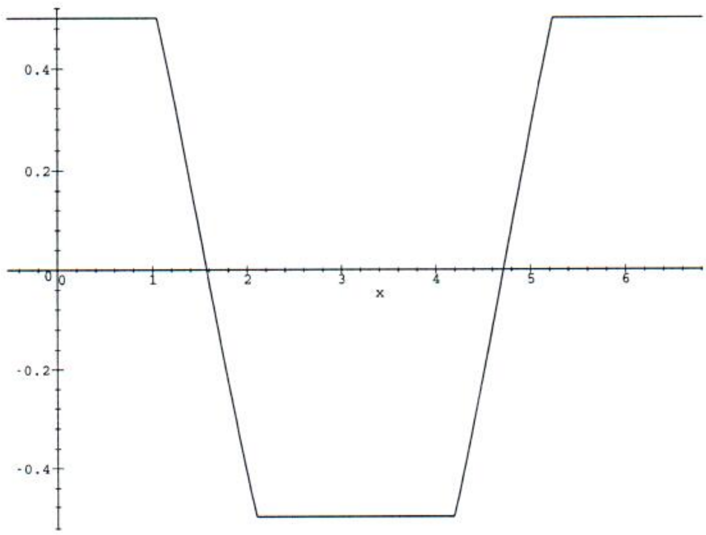
$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in \langle 2\pi/3, 4\pi/3\rangle + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x, & x \in ((\pi/3, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 1/2, & x \in \langle -\pi/3, \pi/3\rangle + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Z předchozího vyjádření vyplývá, že

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi/3, \pi/3) + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ -\sin x, & x \in (\pi/3, 2\pi/3) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:

$$\begin{aligned} f'_+(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi+} -\sin x = -\sin(\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \\ f'_-(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi-} 0 = 0, \\ f'_+(2\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_-(2\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \\ f'_+(4\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(4\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2, \\ f'_-(4\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_+(5\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_-(5\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(5\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



Příklad E2 : Označme $a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}$. Platí:

$$a_n > 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ a } a_n = \frac{2}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}} < \frac{2}{n^{3/2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ konverguje a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i vyšetřovaná řada.

Příklad E3 : Pišme

$$\left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)\right).$$

Spočítejme nejprve limitu

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\log(\frac{2^x+8^x}{2})}{x} &= \lim_{x\to0}\frac{\log(\frac{2^x+8^x}{2})}{\frac{2^x+8^x}{2}-1}\cdot\frac{2^x+8^x-2}{2x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\log(\frac{2^x+8^x}{2})}{\frac{2^x+8^x}{2}-1}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2^x+8^x-2}{2x} = 1\cdot\log 4.\end{aligned}$$

Při výpočtu první limity jsme využili

(1) $\lim_{y\to1}\frac{\log y}{y-1} = 1$,
(2) výraz $\frac{2^x+8^x}{2}$ je na jistém okolí 0 různý od 1,
(3) větu o limitě složené funkce.

Rovnost

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x+8^x-2}{2x} = \log 4$$

je možno odvodit pomocí l'Hospitalova pravidla nebo také takto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{2^x+8^x-2}{2x} &= \lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{2^x-1}{x} + \lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{8^x-1}{x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{x\log2}-1}{x\log2}\cdot\log2 + \lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{x\log8}-1}{x\log8}\cdot\log8\\ &= \frac{1}{2}(\log2+\log8) = \log4.\end{aligned}$$

Zde jsme užili větu o limitě složené funkce, známou limitu $\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y} = 1$, prostotu zobrazení $x\mapsto x\log2$, $x\mapsto x\log8$ (viz podmínka (P1) ve větě o limitě složené funkce) a větu o aritmetice limit.

Předchozí výpočty spolu se spojitostí exponenciály dávají

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 4.$$

Příklad E4 : Zkoumaná funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Je-li $x\neq0$, můžeme $f'(x)$ vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

(2d)

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\,\mathrm{sgn}\,x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

(2e)

V 0 vypočítáme jednostranné derivace pomocí limity derivace (předpoklady příslušné věty jsou splněny):

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{2},$$
$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = -\sqrt{2}.$$

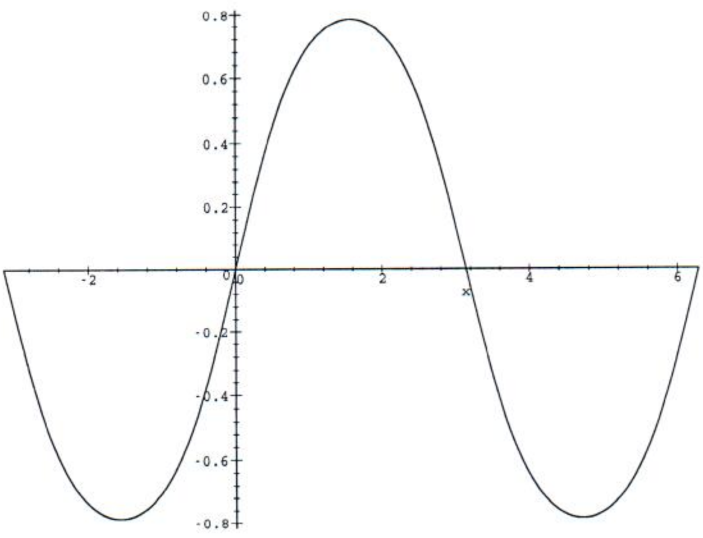
V 0 tedy derivace neexistuje.

Příklad E5 : Platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$, 2π-periodická a lichá. Spočtěme derivace a zkoumejme jejich znaménka:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$f''(x) = -\sin x \cdot \frac{1+\sin^2 x + 2\cos^2 x}{(1+\sin^2 x)^2}, \qquad x \in \mathbb{R};$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi/2, \pi/2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi/2, 3\pi/2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, \pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že f je rostoucí na intervalech tvaru $(-\pi/2, \pi/2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, klesající na intervalech tvaru $(\pi/2, 3\pi/2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; v bodech $\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má f globální maxima a v bodech $3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má f globální minima. Funkce f je na intervalech $(0, \pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, konkávní a na intervalech tvaru $(\pi, 2\pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, konvexní, v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má f inflexní body; $\mathcal{H}(f) = \langle -\pi/4, \pi/4 \rangle$; f nemá žádné asymptoty.

Takto vypadá graf funkce f:



To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$ neexistuje.

Příklad F2 : Funkce arctg je ve svém definičním oboru rostoucí a proto

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ 0 < \operatorname{arctg} 1 \le \operatorname{arctg} n$$

a také

$$(\star) \qquad \forall n \in \mathbb{N}: \ 0 < \frac{\operatorname{arctg} 1}{n} \le \frac{\operatorname{arctg} n}{n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje a proto diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 1}{n}$. Odtud, z $(\star)$ a ze srovnávacího kritéria dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$ diverguje.

Příklad F3 : Zde nejde o nic jiného, než o určení asymptoty k funkci $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+x}$ v $+\infty$. Počítejme:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x}}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \quad (=a);\\
\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x} - x &= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+x} - x) \cdot \frac{(x^3+x)^{\frac{2}{3}} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}}x + x^2}{(x^3+x)^{\frac{2}{3}} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}}x + x^2}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x^3+x)^{\frac{2}{3}} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}}x + x^2}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}} + x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad (=b).
\end{aligned}$$

Řešením úlohy jsou čísla $a = 1$ a $b = 0$.

Příklad F4 : Pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = 2x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) + x^2(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}).$$

Tento vztah vyplývá z věty o aritmetice derivací a věty o derivaci složené funkce. V bodě 0 počítejme derivaci z definice, tj. počítejme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) = 0,$$

neboť $\lim_{x\to 0} x = 0$ a funkce $x \mapsto (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})$ je omezená na jistém prstencovém okolí bodu 0. Platí tedy $f'(0) = 0$.

Příklad F5 : Snadno zjistíme $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a f je na $\mathbb{R}$ spojitá; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Funkce f není lichá, není sudá a není periodická. Pro f' platí

$$f'(x) = (x^2+4x+3)e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

můžeme podle věty o limitě složené funkce a Heineho věty psát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n^2+n})}{\frac{1}{n^2+n}} = 1.$$

Z věty o aritmetice limit a spojitosti odmocniny plyne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{1+\frac{1}{n}} = 2.$$

Dohromady pak máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2+n+1)-\log(n^2+n)}{\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}} = 2.$$

Příklad 12 : Členy uvažované řady jsou kladné a použijeme-li podílové kritérium, dostaneme:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{4^{n+1}+5^{n+1}} \cdot \frac{4^n+5^n}{3^n+4^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{4^n}+4}{\frac{4^{n+1}}{5^n}+5} \cdot \frac{\frac{4^n}{5^n}+1}{\frac{3^n}{4^n}+1} = \frac{4}{5} < 1.
\end{aligned}$$

Zkoumaná řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Příklad 13 : Limita čitatele a jmenovatele je rovna 0 a funkce ve jmenovateli i čitateli mají v každém bodě vlastní derivaci. Pokusme se tedy použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{e^{x^3}-1} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{e^{x^3}\cdot 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{x^3}\cdot 3x} = \frac{1}{3}.$$

Vzhledem k tomu, že limita podílu derivací existuje, tak je i první rovnost v předchozím výpočtu v pořádku a výsledek je roven 1/3.

Příklad 14 : Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x + 4\operatorname{arctg}(\sin x), & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k\in\mathbb{Z}, \\ x, & x \in \langle (2k+1)\pi, (2k+2)\pi\rangle,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

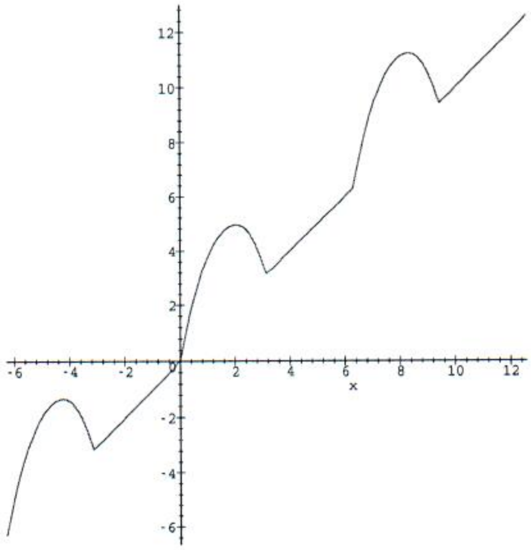
Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude mimo body ve tvaru $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k\in\mathbb{Z}, \\ 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi),\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je na $\mathbb{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, lze tedy počítat pomocí limit derivací:

$$
\begin{aligned}
f'_+(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi+} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi+} \left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = 5,\\
f'_-(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi-} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi-} 1 = 1,\\
f'_-((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to (2k+1)\pi-} f'(x) = \lim_{x\to (2k+1)\pi-} \left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = -3,\\
f'_+((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to (2k+1)\pi+} f'(x) = \lim_{x\to (2k+1)\pi+} 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodech tvaru $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nemá derivaci.



Příklad 15 : Platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1+} f(x) = 0$. Funkce f je spojitá na $\mathcal{D}(f)$, ale není sudá, ani lichá, ani periodická. Spočtěme f' a f'' a prozkoumejme jejich znaménko:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x(3+x)}{(1+x)^2}\exp(x/(1+x)), \qquad x \in \mathcal{D}(f);\\
f''(x) &= \frac{5x+3}{(1+x)^4}\exp(x/(1+x)), \qquad x \in \mathcal{D}(f);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (0,+\infty),\\
f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (-3,-1) \cup (-1,0),\\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-3,-1\};\\
f''(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-3/5,\infty),\\
f''(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (-1,-3/5),\\
f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-3/5\}.
\end{aligned}
$$

Ve výpočtu jsme využili větu o aritmetice limit pro funkce a vztah

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a),$$

který vyplývá ze spojitosti funkce g v bodě a. ■

5.1.18. Poznámka. Tvrzení Věty 5.1.17 platí obdobně i pro jednostranné derivace.

5.1.19. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n a^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Vzorec plyne z Příkladů 5.1.11, 5.1.12 a Věty 5.1.17(a). ♣

Na následujících příkladech ukážeme, že předpoklady Věty 5.1.17 jsou podstatné a není možné je vynechat.

3a **5.1.20. Příklad.** Definujeme funkce f a g proměnné $x \in \mathbb{R}$ předpisy

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{4}, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $f'(0)$ a $g'(0)$ existují, ale $(f+g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Obdobně jako v Příkladu 5.1.14 spočteme, že $f'(0) = \infty$ a $g'(0) = -\infty$. Dále platí

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ -\frac{1}{4}, & x = 0. \end{cases}$$

Opět snadno vypočítáme, že $(f+g)'_+(0) = \infty$ a $(f+g)'_-(0) = -\infty$. Tedy podle Věty 5.1.5 $(f+g)'(0)$ neexistuje. ♣

Předcházející příklad ukazuje, že z existence derivací funkcí f a g v bodě a obecně neplyne existence derivace funkce $f+g$ v bodě a. Funkce uvedené v tomto příkladu ovšem nesplňují podmínku Věty 5.1.17(a), totiž že výraz $f'(a) + g'(a)$ má mít smysl.

Následující příklad ilustruje důležitost předpokladu spojitosti alespoň jedné z uvažovaných funkcí ve Větě 5.1.17(b).

3b **5.1.21. Příklad.** Nechť funkce f a g jsou definovány stejně jako v Příkladu 5.1.20. Dokažte, že výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ má smysl, ale přesto $(fg)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Vynásobíme-li funkce f a g, dostaneme

$$(fg)(x) = \begin{cases} -1, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{8}, & x = 0. \end{cases}$$

Podobně jako v Příkladu 5.1.20 odvodíme, že derivace $(fg)'(0)$ neexistuje. Výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ však smysl má, protože

$$f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = \infty \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-\infty) = \infty.$$

♣

Také ve Větě 5.1.17(c) je předpoklad spojitosti funkce g podstatný, jak ukazuje následující příklad.

(4)

5.1.22. Příklad. Nechť $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ a nechť funkce g je definována předpisem

$$g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že výraz

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$$

má smysl, přesto ale $(\frac{f}{g})'(0)$ neexistuje.

Řešení. Jest

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} = \frac{-g'(0)}{g^2(0)} = \frac{\infty}{\frac{1}{4}} = \infty,$$

a tedy výraz

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$$

má smysl. Dále

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

a tedy

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_+(0) = -\infty$$

a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_-(0) = \infty.$$

Podle Věty 5.1.5 tedy $(\frac{f}{g})'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.23. Věta (derivace složené funkce). Nechť funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a má v tomto bodě derivaci. Nechť funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a), \tag{5.2}$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Označme $b = g(a)$. Díky existenci derivace $f'(b)$ nalezneme $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, takové, že funkce f je definována na $B(b, \sigma)$ (Poznámka 5.1.6(a)). Protože g je spojitá v a, existuje $\varrho \in \mathbb{R}$, $\varrho > 0$, takové, že $g(B(a, \varrho)) \subset B(b, \sigma)$ (Definice 4.1.18). Funkce $f \circ g$ je tedy dobře definována na okolí $B(a, \varrho)$.

Předpokládejme nejprve, že platí $g'(a) \neq 0$. Pak existuje $\tilde{\varrho} \in (0, \varrho)$ takové, že pro každé $x \in P(a, \tilde{\varrho})$ platí

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0. \tag{5.3}$$

Tím je důkaz dokončen. ■

5.1.24. Poznámka. Ve Větě 5.1.23 je předpoklad spojitosti funkce g v bodě a automaticky splněn, je-li $g'(a)$ vlastní, jak plyne z Věty 5.1.15.

Předpoklad spojitosti vnitřní funkce ve Větě 5.1.23 nelze obecně vynechat, jak ukazuje následující příklad.

5.1.25. Příklad. Nechť funkce f a g jsou definovány pomocí předpisů

$$f(y) = |y|, \quad y \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

5 Dokažte, že výraz $f'(g(0))g'(0)$ má smysl, ale přesto $(f \circ g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Podobně jako v Příkladu 5.1.14 odvodíme, že $g'(0) = \infty$. Dále zřejmě platí $f'(-\frac{1}{2}) = -1$. Výraz

$$f'(g(0))g'(0) = f'(-\frac{1}{2}) \cdot g'(0) = (-1) \cdot \infty = -\infty$$

tedy má smysl. Dále platí

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \end{cases}$$

a tedy $(f \circ g)'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.26. Věta (derivace inverzní funkce). Nechť I je nedegenerovaný interval a nechť a je vnitřním bodem I. Nechť f je spojitá a ryze monotónní funkce na I. Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.

(a) Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I, pak

$$(f^{-1})'(b) = \infty.$$

(c) Je-li $f'(a) = 0$ a f je klesající na I, pak

$$(f^{-1})'(b) = -\infty.$$

Důkaz. (a) Předpokládejme, že funkce f je na intervalu I rostoucí. Z Věty 4.3.6 vyplývá, že množina $J = f(I)$ je interval. Dle Věty 4.3.13 navíc víme, že inverzní funkce $f^{-1}\colon J \to I$ je spojitá a rostoucí. Protože a je vnitřním bodem I a f je rostoucí, je také b vnitřním bodem J. Tedy existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(b, \varepsilon) \subset J$. Díky tomu, že a je vnitřním bodem I víme, že existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $B(a, \delta) \subset I$. Ze spojitosti funkce f v bodě a plyne, že toto δ lze zvolit tak, aby $f(B(a, \delta)) \subset B(b, \varepsilon)$. Označme

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in P(a, \delta). \tag{5.8}$$

(6) $f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq -1 \\ ax^3+x+2b & x > -1 \end{cases}$

(1) funkce musí být spojitá:

$$\lim_{x \to -1+} ax^3+x+2b = a(-1)+b$$

$$-a-1+2b = -a+b$$

$$\boxed{b = 1}$$

(2) Derivace $f'_+(-1) = f'_-(-1)$. Fce je spoji tedy lze užít věty

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1+} (ax^3+x+2b)' = \lim_{x \to -1+} a \cdot 3x^2 + 1 = 3a+1$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1-} (ax+b)' = \lim_{x \to -1-} a = a$$

$$3a+1 = a$$

$$2a = 1 \qquad \boxed{a = -1/2}$$

7. Kde dělá tazatel chybu?

Given the function:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{if } x \geq 0 \\ x^2 - 1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Question: are we justified to say that the derivative at $f(0)$ exists? If so, what is $f'(0)$? And how do we justify it?

Of course I do realize that the function isn't continuous at $x = 0$ but still since the slope near $x = 0$ seems equal near $0+$ and $0-$ I wondered why we can't say that $f'(0) = 0$

What I tried is this:

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{(0+h)^2+1-(0^2+1)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h^2}{h} = h = 0$$

tady

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{(0+h)^2+1-(0^2+1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{h^2}{h} = h = 0$$

My conclusion is that since both the right and left limit using the definition of the derivative exist and generate the same answer the limit exists such that $f'(0) = 0$.

Apparently this is not true, so what is my mistake?

Pochází z: `https://math.stackexchange.com/questions/1532014/how-to-apply-the-definition-of-a-derivative-with-a-piecewise-function`

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{(0+h)^2 - 1 - (0^2+1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{h^2 - 2}{h} = \infty$$