14. cvičení – VOLSF + f^g

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Spočteme limitu vnitřní funkce:

$$\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1,$$

neboť další složená funkce

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

(podmínka P, $g(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ pro $\forall x \in (0,\infty)$.)
Zpět k původní funkci

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1,$$

tady podmínka S, e^z je spojitá funkce v bodě 1.

(b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x = e^{-2},$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

Spočteme limitu vnitřní funkce:

$$\lim_{x\to\infty} x\log\left(1-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} -2\cdot\frac{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}{-2\cdot\frac{1}{x}} = -2,$$

neboť další složená funkce

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

a

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{2}{x} = 0.$$

(podmínka P, $g(x) = -\frac{2}{x} \neq 0$ pro $\forall x \in (42,\infty)$.)

Zpět k původní funkci

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\log\left(1-\frac{2}{x}\right)} = e^{-2},$$

tady podmínka S, e^z je spojitá funkce v bodě -2.

(c)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x = 1$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}$$

Vnitřní funkce:

$$\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2}\frac{\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\frac{\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{2}{x^2}} \overset{VOAL}{=} 0\cdot 1 = 0$$

Použita vnitřní funkce na logaritmus, podmínka P, $2/x^2 \neq 0$ na $(0,\infty)$.
Celkem tedy

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x = e^0 = 1,$$

(podmínka S, e^y spojitá v 0.)

2. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Řešení:
Použijeme úpravy na exponent a dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x)/[(1-x)(1+\sqrt{x})]}\\ &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{1/(1+\sqrt{x})}\end{aligned}$$

Funkci výše můžeme rozepsat

$$\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{1/(1+\sqrt{x})} = e^{1/(1+\sqrt{x})\cdot\log\left(\frac{1+x}{2+x}\right)}$$

Nyní je vidět, že funkce je spojitá v bodě 1 - jde o složení, součet a násobení spojitých funkcí.
Tedy dosazením dostaneme

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{1/(1+\sqrt{x})} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = 1$$

Řešení:
Použijeme klasický trik převedení do exponentu za použití vzorce $y = e^{\log y}$.

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \lim_{x\to+\infty}\exp\left[\log\left(\frac{1+x}{2+x}\right)\cdot\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right] =$$

Užijeme VOLSF a spočteme limitu vnitřní funkce

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{1+x}{2+x}\right)\cdot\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{2}{x}+1}\right)\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}} \overset{AL}{=} 0\cdot 0 = 0.$$

Užili jsme vnitřní funkci na logaritmus, podmínka (S) ($\log y$ spojitý v 1): $g(x) = \left(\frac{x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{2}{x}+1}\right)$, $f(y) = \log y$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{2}{x}+1}\right) \overset{AL}{=} 1$$

a

$$\lim_{y\to 1}\log y = 0.$$

Pro původní limitu pak máme z VOLSF (podmínka (S), e^y je spojitá v 0)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = e^0 = 1.$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2} = 0$$

Řešení:
Upravujeme.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\exp\left[\log\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)\cdot x^2\right]$$

Spočteme limitu vnitřní funkce (na logaritmus užito VOLSF, podmínka (S), tedy $\log y$ spojitý v $\frac{1}{2}$):

$$\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)\cdot x^2 = \log\left(\frac{1}{2}\right)\infty = -\infty$$

Původní limita: Protože $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$, máme

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2} = 0$$

(VOLSF, podmínka P, $x^2\log\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) \neq -\infty$ na $P(\infty, 1)$.)

(d)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=0$$

Řešení:
Upravujeme.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=\lim_{x\to\infty}\exp\left[\log\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)\cdot\frac{x^3}{1-x}\right]$$

Limita vnitřní funkce

$$\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)\cdot\frac{x^3}{1-x}=\log\frac{3}{2}\cdot-\infty=-\infty$$

Použito VOLSF na logaritmus, podmínka (S): $\log y$ spojitý v $\frac{3}{2}$.
Protože $\lim_{y\to-\infty}e^y=0$, pro původní limitu (podmínka (P) analogicky jako v předchozím příkladě) pak je

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=0$$

(e)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}=0$$

Řešení:
Upravíme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\exp\left(\log\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]\cdot\operatorname{tg}2x\right)=$$

Pro vnitřní funkci máme (logaritmus je spojitý v $\tan\frac{3\pi}{8}$)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\left(\log\left(\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi\right)\cdot-\infty\right)=-\infty.$$

Protože $\lim_{y\to-\infty}e^y=0$, pro původní limitu (podmínka (P)) pak je

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}=0.$$

(f)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=1$$

Řešení:
Upravíme

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\exp\left(\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Pro vnitřní funkci (logaritmus spojitý v 1):

$$\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1} = \log 1\cdot 1 = 0.$$

Dohromady

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}} = e^0 = 1$$

Podmínka (S).

(g)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x} = 1$$

Řešení: Upravíme

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x} = \lim_{x\to\infty}\exp\left(\log\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)\cdot\frac{1}{x}\right)$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\log\left(\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)\cdot\frac{1}{x} \overset{AL}{=} \log\frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Pro logaritmus máme VOLSF (S), protože logaritmus je spojitý v $\frac{1}{2}$.
Pro vnější funkci pak máme

$$\lim_{y\to 0} e^y = 1$$

Podmínka (S) e^y je spojité v 0.

3. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log x+1}{\log x}\right)^{\log x} = e$$

Řešení: Máme

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log x+1}{\log x}\right)^{\log x} = \left(1+\frac{1}{\log x}\right)^{\log x}$$

VOLSF $g(x)=\log x,\ f(y)=(1+\frac{1}{y})^y$, pak

$$\lim_{x\to\infty}\log x = \infty,$$

a

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e,$$

což víme z 1. příkladu.
Podmínka (P), $\log x \neq \infty$ na $P(\infty, 1)$.

(b)

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=e$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{\sin^2 x}\log(1+x^2)\right)$$

Rozepíšeme

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\log(1+x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\overset{AL}{=}1\cdot 1.$$

Máme VOLSF pro $g(x)=x^2$, $f(y)=\frac{\log(1+y)}{y}$, podmínka (P), $x^2\neq 0$ na $P(0,42)$. Původní limita pak je (podmínka (S), exponenciála spojitá v 1)

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=e^1$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}=e$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{cotg}^2 x}=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{-1}\cdot\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

První limitu spočteme snadno dosazením (jde o spojitou funkci), vyjde $(1+0)^{-1}=1^{-1}=1$. Zbyde tedy pouze druhá limita, která ale vede na předchozí příklad. Celkový výsledek

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}\overset{AL}{=}1\cdot e=e$$

(d)

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\sin x}}=e$$

Řešení: Přepíšeme na

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{\sin x}\log(1+\operatorname{tg}x)\right]$$

Vnitřní limitu rozšíříme

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\log(1+\operatorname{tg}x)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x}\cdot\frac{\log(1+\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\log(1+\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\overset{VOAL}{=}1\cdot 1.$$

Dohromady pak máme

$$\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{\sin x}\log(1+\operatorname{tg}x)\right]=e^1=e$$

Užili jsme VOLSF, $g(x)=\operatorname{tg}x$, $\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}x=0$, $f(y)=\log(1+y)/y$, $\lim_{y\to 0}f(y)=1$. Podmínka P: $\tan x\neq 0$ na $P(0,\frac{\pi}{4})$.

(e)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = 1.$$

Řešení:
Přepíšeme pomocí exponenciály:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\operatorname{tg} x \log(\sin x)}$$

Spočteme limitu vnitřní funkce

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \log(\sin x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\log(\sin x)}{\sin x - 1} \cdot (\sin x - 1)$$

Uvažujme limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x) - 1}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x) - 1}{(\frac{\pi}{2} - x)^2} \cdot \frac{(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\overset{AL}{=} -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Zpět k vnitřní limitě:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\log(\sin x)}{\sin x - 1} \cdot (\sin x - 1) \overset{AL}{=} 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Přechod k původní limitě

$$e^0 = 1.$$

Podmínky VOLSF:

- $f(y) = \frac{\log y}{y-1}$, $g(x) = \sin x$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim_{y\to 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$. Podmínka (P): $\sin x \neq 1$ na $P(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$.
- $f(y) = e^y$, $g(x) = \tan x \log(\sin x)$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x \log(\sin x) = 0$, $\lim_{y\to 0} e^y = 1$. Podmínka (S): e^y je spojitá v 0.
- $f(y) = \frac{\cos y - 1}{y^2}$, $g(x) = (\frac{\pi}{2} - x)$, Podmínka (P): $(\frac{\pi}{2} - x) \neq 0$ na $P(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$.
- $f(y) = \frac{y}{\sin y}$, $g(x) = (\frac{\pi}{2} - x)$, Podmínka (P): $(\frac{\pi}{2} - x) \neq 0$ na $P(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$.

(f)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e^{2a}$$

Řešení:
Pro $a = 0$ máme konstantní funkci

$$\lim_{x\to\infty} 1^x = \lim_{x\to\infty} 1 = 1.$$

Pro $a \neq 0$ jednoduchou úpravou dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-a+2a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)}$$

Vnitřní funkce:

$$\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{2a}{x-a}\right) = \lim_{x\to\infty} x\frac{\log\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)}{\frac{2a}{x-a}}\left(\frac{2a}{x-a}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)}{1+\frac{2a}{x-a}}\cdot\frac{x}{x}\cdot\left(\frac{2a}{1-\frac{a}{x}}\right)$$

$$\overset{AL}{=} 1\cdot 2a = 2a$$

Použili jsme VOLSF, $f(y) = \frac{\log(1+y)}{y}$, $g(x) = \frac{2a}{x-a}$, podmínka (P): $\frac{2a}{x-a} \neq 0$ na $P(\infty, 1/2a)$.
Původní limita (podmínka (S): exponenciála je spojitá na celém $\mathbb{R}$, tedy i v bodě $2a$).

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\log\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)} = e^{2a}.$$

Zkouškové příklady

4. Spočtěte limity

(a) $\lim_{x\to 0+}\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}}$

Řešení: Přepíšeme jako:

$$\lim_{x\to 0+}\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}} = \lim_{x\to 0+}\exp\left[\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}\log\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)\right]$$

Spočteme limitu vnitřní funkce:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}\log\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right) = \lim_{x\to 0+} -\sqrt[4]{\frac{x^2}{1-\cos x}}\cdot\frac{\log\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)}{-\sqrt{\arcsin x}}\cdot\sqrt{\frac{\arcsin x}{x}}$$

$$\overset{VOAL}{=} -\sqrt[4]{2}\cdot 1\cdot 1 = -\sqrt[4]{2}$$

Pak pro původní limitu máme

$$\lim_{x\to 0+}\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}} = e^{-\sqrt[4]{2}}$$

Užili jsme VOLSF na:

i. $f = e^y$, $g = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}\log\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)$, podmínka (S)

ii. $f = \sqrt[4]{y}$, $g = \frac{x^2}{1-\cos x}$, podmínka (S)

iii. $f = \sqrt{y}$, $g = \frac{\arcsin x}{x}$, podmínka (S)

iv. $f = \frac{\log 1+y}{y}$, $g = -\sqrt{\arcsin x}$, podmínka (P): $\arcsin x \neq 0$ na $P_+(0, \frac{1}{2})$.

(b) $\lim_{x\to 0}\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{3x}}$

Řešení: Přepíšeme

$$\lim_{x\to 0}\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{3x}} = \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{x^2+1}{3x}\log\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)\right]$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{3x}\log\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{3x}\frac{\log\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)}{2e^{\frac{4x}{x+1}}-2}\cdot 2\frac{e^{\frac{4x}{x+1}}-1}{\frac{4x}{x+1}}\cdot\frac{4x}{x+1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2+1}{x+1}\frac{\log\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)}{2e^{\frac{4x}{x+1}}-2}\cdot 2\frac{e^{\frac{4x}{x+1}}-1}{\frac{4x}{x+1}}\\ &\overset{VOAL}{=}\frac{4}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 1=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

Původní limita pak je

$$\lim_{x\to 0}\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{3x}} = e^{\frac{8}{3}}$$

Užili jsme VOLSF na:

i. $f=e^y$, $g=\frac{x^2+1}{3x}\log\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)$ podmínka (S)

ii. $f=\frac{\log y}{y-1}$, $g=\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)$, podmínka (P): $2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\neq 1$, $P(0,\frac{1}{2})$.

iii. $f=\frac{e^y-1}{y}$, $g(x)=\frac{4x}{x+1}$, podmínka (P): $\frac{4x}{x+1}\neq 0$, $P(0,\frac{1}{2})$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

Řešení: Píšeme jako

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\exp\left[\frac{1}{x}\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)\right]$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right) &= \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\cdot\frac{\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)}{\frac{4^x+5^x+6^x}{3}-1}\cdot\frac{4^x+5^x+6^x-3}{3}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{1}{3}\cdot\frac{\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)}{\frac{4^x+5^x+6^x}{3}-1}\cdot\left(\frac{4^x-1}{x}+\frac{5^x-1}{x}+\frac{6^x-1}{x}\right)\\ &\overset{VOAL}{=}\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(\log 4+\log 5+\log 6)=\log 120^{1/3}\end{aligned}$$

Protože máme

$$\lim_{x\to 0+}\frac{4^x-1}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{e^{x\log 4}-1}{x\log 4}\cdot\log 4 = \log 4.$$

Analogicky

$$\lim_{x\to 0+}\frac{5^x-1}{x} = \log 5$$

a

$$\lim_{x\to 0+} \frac{6^x - 1}{x} = \log 6$$

Původní limita:

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{120}$$

Užili jsme VOLSF na:

i. $f = e^y$, $g = \frac{1}{x} \log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)$, podmínka (S)
ii. $f = \frac{\log y}{y-1}$, $g = \left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)$ podmínka (P): $\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right) \neq 1$, $P^+(0, \frac{1}{2})$.
iii. $f = \frac{e^y-1}{y}$, $g(x) = x \log 4$ podmínka (P): $x \log 4 \neq 0$, $P^+(0, \frac{1}{2})$. Pro $\log 5$ a $\log 6$ analogicky.

Teorie

5. Nechť f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$. Nechť navíc $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$. Ukažte, že pak $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Řešení:
Pro spor předpokládejme, že pro nějaké $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je $f(a) = A \neq 0$. Pro jednoduchost předpokládejme, že $A > 0$ Protože f je spojitá, tak i $\lim_{x\to a} = A$.
Zvolme $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta)$ platí $|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$. Neboli
$$0 < \frac{A}{2} < f(x) < \frac{3A}{2}.$$
Jelikož ale v každém intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ existuje racionální x', které má $f(x') = 0$, máme spor.
(Pro $A < 0$ postupujeme analogicky.)

6. Sestrojte spojitou nezápornou funkci f definovanou na $\mathbb{R}$ takovou, že: pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \in f([n, \infty)$ a f není omezená na intervalu $[n, \infty)$.
Řešení:
Např. $f(x) = |x \sin(\pi x)|$.