



13. cvičení – Teorie z písemek

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte nebo sestrojte protipříklad):

1. Nechtě $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti.

- (a) Sestrojte a_n a b_n , aby $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.
- (b) Lze sestřit a_n a b_n , které splňují (a) a navíc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$?
- (c) Lze sestřit a_n a b_n , které splňují (a) a navíc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / b_n = 1$?

Řešení: Uvažujme

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ liché,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ sudé.} \end{cases}$$

a

$$b_n = \begin{cases} n, & n \text{ sudé,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ liché.} \end{cases}$$

Pak a_n a b_n splňují všechny tři body.

2. Nechtě $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti.

- (a) Hromadné hodnoty $H(\{a_n\}) \subset [-3, 3]$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty \Rightarrow \{a_n\}$ je zdola omezená.

Řešení:

- (a) Platí. Máme, že a_n je zdola omezená nějakým $M \in \mathbb{R}$. Kdyby nebyla, tak z definice platí $\liminf a_n = -\infty$, což je ve sporu s faktem, že $H(\{a_n\}) \subset [-3, 3]$.

Pak platí odhad

$$M + b_n \leq a_n + b_n.$$

Navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M + b_n \stackrel{AL}{=} M + \infty = \infty$$

a tedy z věty o uspořádání je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty.$$

- (b) Neplatí. Protipříklad: $a_n = -n$, $b_n = 2n$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = -n + 2n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, ale a_n je zdola neomezená.

3. Nechtě $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je posloupnost reálných funkcí (pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme jednu funkci) a nechtě pro každé $x \in [0, 1]$ existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

- (a) Nechtě f_n jsou uniformně omezené, tedy $\exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0, 1] : |f_n(x)| \leq K$. Musí být f omezená funkce?

(b) Necht jsou všechny f_n spojité funkce. Musí být f spojitá funkce?

Řešení:

- (a) Musí. Zafixujme $x \in [0, 1]$. Pak $-K \leq f_n(x) \leq K$. Pak z věty o uspořádání je $-K \leq f(x) \leq K$. Tedy f je omezená.
- (b) Nemusí. Protipříklad: $f_n(x) = x^n$. Pak f_n jsou spojité na $[0, 1]$. Ale

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

není spojitá funkce.

4. Necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Definujme symetrickou limitu funkce jako $s - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2}$.

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R} \Rightarrow s - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$?
- (b) $s - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$?

Řešení:

- (a) Platí. Máme $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = A$. Plyne z VOLSF: Vnitřní funkce $a+h$. Vnější funkce $f(x)$. Limity $\lim_{h \rightarrow 0} a+h = a$. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. Podmínka (P): $a+h \neq a$ na $P(a, 42)$. Pak i limita složené funkce je $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = A$.

Analogicky $\lim_{h \rightarrow 0} f(a-h) = A$.

Nakonec máme

$$s - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} \stackrel{AL}{=} \frac{2A}{2} = A.$$

- (b) Neplatí. Protipříklad: $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Pak

$$s - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn}(0+h) - \operatorname{sgn}(0-h)}{2} = s - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{2} = 0$$

ale $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje.

5. (a) Necht existují $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = B \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Existuje $\lim_{x \rightarrow 0} \max\{f(x), g(x)\} = \max\{A, B\}$.
- (b) Necht existují $\lim_{x \rightarrow 0} \max\{f(x), g(x)\} \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow 0} \min\{f(x), g(x)\} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Existují $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = b$.

Řešení:

- (a) Platí (bylo na minulém cvičení)

$$\begin{aligned} \max\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}, \\ \min\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}. \end{aligned}$$

Pak z AL a VOLSF (spojitá absolutní hodnota jako vnější funkce)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \max\{f(x), g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{A + B + |A - B|}{2} = \max\{A, B\}.$$

(b) Neplatí. Uvažujme $f = \operatorname{sgn} x$ a $g = -\operatorname{sgn} x$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \max\{f, g\} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \min\{f, g\} = -1$$

ale $\lim_{x \rightarrow 0} f \nexists$ a $\lim_{x \rightarrow 0} g \nexists$.

6. (a) Necht' $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Dokažte, že pak i funkce $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá funkce.
- (b) Uvažujme funkci $f_a(x) = x^3 + ax$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr. Dokažte, že funkce $x \mapsto \operatorname{sgn}(f_a(x))$, $x \in \mathbb{R}$, není spojitá na $\mathbb{R}$.

Řešení: Příklad i s řešením máme od prof. Spurného <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma1.php>

(a) Platí (bylo na minulém cvičení)

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2},$$

Navíc máme, že $|x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a konstantní funkce $1/2$ je spojitá na $\mathbb{R}$. Tedy $\max\{f, g\}$ je složením, součtem, rozdílem a součinem spojitých funkcí. Tedy je spojitá.

(b) Rozborem případů

- $a = 0$, pak $\operatorname{sgn}(x^3) = \operatorname{sgn} x$, která je nespojitá v 0
- $a > 0$, pak $x^2 + a > 0$ a $\operatorname{sgn}(x(x^2 + a)) = \operatorname{sgn} x$, která je nespojitá v 0
- $a < 0$, pak $\operatorname{sgn}(x^3 + ax) = \operatorname{sgn}(x(x^2 - (-a))) = \operatorname{sgn}(x(x - \sqrt{-a})(x + \sqrt{-a}))$, což se rovná $\operatorname{sgn} x$ na $(-\sqrt{-a}, \sqrt{-a})$, která je nespojitá v 0.

7. Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ pro každé $c \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda platí některé z následujících tvrzení:

- (a) Platí $f(\mathbb{R}) = \{0\}$.
- (b) Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$.
- (c) Funkce f je omezená na $\mathbb{R}$.

Řešení: Příklad i s řešením máme od prof. Spurného <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma1.php>

(a) Neplatí. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \neq 1. \end{cases}$$

Pak $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.

- (b) Neplatí. Jako v (a).
- (c) Neplatí. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} n, & x = n, n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak f je neomezená.

8. Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce.

- (a) Pokud existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, pak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$.
- (b) Pokud existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$, pak existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (c) Pokud f je spojitá na $\mathbb{R}$ a existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$, pak existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Řešení:

(a) Platí. Časem přímo vyplyne z Heineho věty. Do té doby ukážeme z definice.

- Necht' $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Pak

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (1/\delta, \infty) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Zafixujme ε . Položme $n_0 = \lceil 1/\delta \rceil$. Pak pro každé $n \geq n_0$ je i $n \geq 1/\delta$ a tedy

$$|f(n) - A| < \varepsilon,$$

což bylo třeba ukázat.

- Necht' $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Pak

$$\forall K > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (1/\delta, \infty) : f(x) > K$$

Zafixujme K . Položme $n_0 = \lceil 1/\delta \rceil$. Pak pro každé $n \geq n_0$ je i $n \geq 1/\delta$ a tedy

$$f(n) > K.$$

- Příklad $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ukážeme analogicky.

(b) Neplatí. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 1$, ale $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \nexists$.

- (c) Neplatí. Uvažujme funkci, kde pro $x \leq \frac{1}{2}$ je $f(x) = 0$, pro $n \in \mathbb{N}$ je $f(n) = 1$, $f(n + 1/2) = 0$ a pro ostatní $x \in \mathbb{R}$ je funkce dodefinována lineárně. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 1$, ale $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \nexists$.

