



12. cvičení – VOLSf + log, exp

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočítejte limity zadaných funkcí

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{x}$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\log(1+3x)}{3x} =$$

VOLSf, podmínka P: $3x \neq 0$ na $P(0, \frac{1}{6})$.

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 - \frac{3}{x}\right)$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 - \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} -3 \frac{\log \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\frac{-3}{x}} = -3$$

VOLSf, podmínka P: $-3/x \neq 0$ na $P(\infty, \frac{1}{6})$.

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{e^{x^2} - 1}$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}/x^2}{(e^{x^2} - 1)/x^2} \stackrel{AL}{=} \frac{\infty}{1} = \infty$$

Zdůvodnění: Z VOLSf, podmínka (P) $x^2 \neq 0$ na $P(0, 1)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)}{x^2} = 1$$

Dále, protože $x \sin x$ je kladný výraz na okolí nuly, též tak x^2 , můžeme doplnit absolutní hodnoty.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x \sin x|^{1/2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{1/2}} \cdot \frac{1}{|x|}$$

$$\stackrel{AL}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = 1 \cdot +\infty = +\infty.$$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 - x + 1)}{\log(x^{10} + x + 1)}$

Řešení:

Postupujeme vytknutím.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 - x + 1)}{\log(x^{10} + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x^2 (1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\log x^{10} (1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x^2 + \log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\log x^{10} + \log(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} =$$

Z vlastností logaritmu:

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x + \log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{10 \log x + \log(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} =$$

A konečně poslední vytknutí

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) / \log x}{10 + \log(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}) / \log x} = \frac{2 + 0}{10 + 0} = \frac{1}{5}.$$

Výpočet limity využívá věty o aritmetice limit a VOLSf (spojitost logaritmu)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x} = \log(1 - 0 + 0) \cdot 0 = 0.$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$$

Řešení:

Sledujte výpočet.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + x \sin x} - 1)/x^2}{(e^{x^2} - 1)/x^2}$$

Jmenovatel jde do jedničky (VOLSf, podm. (P): $x^2 \neq 0$ na $P(0, 1)$).

Druhý zlomek řešíme rozšířením odmocniny.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x \sin x} + 1} \\ &\stackrel{AL}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x \sin x} + 1} = 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dohromady z aritmetiky limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + x \sin x} - 1)/x^2}{(e^{x^2} - 1)/x^2} \stackrel{AL}{=} 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^3 - \arctan x)}{\log(x^2 + \arctan x)}$$

Řešení:

Vytkneme dominantní člen

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^3 - \arctan x)}{\log(x^2 + \arctan x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x^3 (1 - \frac{\arctan x}{x^3})}{\log x^2 (1 + \frac{\arctan x}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \log x + \log(1 - \frac{\arctan x}{x^3})}{2 \log x + \log(1 + \frac{\arctan x}{x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{\log(1 - \frac{\arctan x}{x^3})}{\log x}}{2 + \frac{\log(1 + \frac{\arctan x}{x^2})}{\log x}} \stackrel{VOAL}{=} \frac{3 + 0}{2 + 0} \end{aligned}$$

Použili jsme limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x^3} = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x^2},$$

neb $\arctan x$ je omezená a $1/x^2$ ($1/x^3$) mizející funkce.

Dále jsme použili spojitosti logaritmu (v 1) a aritmetiku limit.

(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\log(x+1) - \log x] = 1$

Řešení: Užijeme pravidla, že rozdíl logaritmů je logaritmus podílu a spojitosti logaritmu.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\log(x+1) - \log x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

VOLSF, podmínka (P), $\frac{1}{x} \neq 0$ na $P(\infty, 42)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1.$$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\log(x^2+4)} - \log x^2}{\operatorname{arccot} x}$

Řešení: Příklad máme odsud: <https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematika-analyza>

Rozepíšeme dle vzorců pro logaritmus a půjčíme a vrátíme na známé limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\log(x^2+4)} - \log x^2}{\operatorname{arccot} x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\log \left(\frac{x^2+4}{x^2}\right)}}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \sqrt{\log \left(\frac{x^2+4}{x^2}\right)}}{x \cdot \operatorname{arccot} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sqrt{\frac{4}{x^2}} \cdot \sqrt{\frac{\log \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x \cdot \operatorname{arccot} x} \\ &\stackrel{VOL}{=} 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Odůvodnění:

Protože jsme na okolí nekonečna, máme $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt{\frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} \cdot 2 = 2.$$

Dále

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}} = 1.$$

Jde o VOLSF, podmínka (P): vnitřní funkce $\frac{4}{x^2} \neq 0$ na $P(\infty, 1)$.

Navíc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}}} = 1,$$

VOLSF, vnější funkce $\sqrt{y}$ je spojitá v 1.

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)}$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\log(1+x^2)}{x^2} \frac{-x^2}{\log(1-x^2)} \stackrel{VOL}{=} -1$$

Podmínka P pro $\pm x^2 \neq 0$ na $P(0, \frac{1}{2})$.

$$(j) \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)$$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 \log \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)}{\frac{-2}{x^2}} \stackrel{V_{OAL}}{=} 0 \cdot 1 = 0$$

Podmínka P pro $-2/x^2 \neq 0$ na $P(\infty, \frac{1}{6})$.

$$(k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(2 + e^{3x})}{\log(3 + e^{2x})}$$

Řešení:

Vytkneme. Pak použijte větu o aritmetice limit a spojitost logaritmu.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(2 + e^{3x})}{\log(3 + e^{2x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log e^{3x} + \log(\frac{2}{e^{3x}} + 1)}{\log e^{2x} + \log(\frac{3}{e^{2x}} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \log(\frac{2}{e^{3x}} + 1)}{2x + \log(\frac{3}{e^{2x}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \log(\frac{2}{e^{3x}} + 1)/x}{2 + \log(\frac{3}{e^{2x}} + 1)/x} = \frac{3 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x} = e$$

Řešení: Příklad máme odsud: <https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematika-analyza>

Převédeme na základní limitu pro $\arccos x$.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\arccos x}$$

První limitu nyní převedeme na limitu pro e^x .

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{e^{2x}(e^{2(1-x)} - 1)}}{\sqrt{\frac{2(1-x)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 1-} e^x \sqrt{2} \sqrt{\frac{e^{2(1-x)} - 1}{2(1-x)}} \stackrel{V_{OAL}}{=} e^1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1}.$$

Pro původní limitu pak máme

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\arccos x} \stackrel{V_{OAL}}{=} e \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = e.$$

Odůvodnění:

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{e^{2(1-x)} - 1}{2(1-x)} = 1.$$

Vnější funkce $\frac{e^y - 1}{y}$, vnitřní $2(1-x)$. Navíc $\lim_{x \rightarrow 1-} 2(1-x) = 0$ a $2(1-x)$ je monotónní na $\mathbb{R}$, tedy $2(1-x) \neq 0$ na $P(1, \frac{1}{42})$.

Potom

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \sqrt{\frac{e^{2(1-x)} - 1}{2(1-x)}} = \sqrt{1}.$$

Vnější funkce $\sqrt{y}$, vnitřní $\frac{e^{2(1-x)} - 1}{2(1-x)}$. Podmínka (S): $\sqrt{y}$ je spojitá v bodě 1.

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$, kde $a > 0$.

Řešení:

Spočteme limitu pro obecné $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} \cdot \log a = 1 \cdot \log a.$$

Užito VOLSF, vnitřní funkce $y = x \log a \neq 0$ na $P(0, 2)$.

Pro $a = 1$ je limita triviálně rovna 0.

(n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1 + 3^x)}{\log(1 + 2^x)}$

Řešení: Protože $3^x \rightarrow 0$, pokud $x \rightarrow -\infty$, vede k cíli rozšíření.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1 + 3^x)}{\log(1 + 2^x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\log(1+3^x)}{3^x}}{\frac{\log(1+2^x)}{2^x}} \cdot \frac{3^x}{2^x} = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0.$$

VOLSF pro $g(x) = 3^x \neq 0$ a $h(x) = 2^x \neq 0$ na $\mathbb{R}$,

(o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\log(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$

Řešení:

V čitateli vytkneme $\sqrt{x}$, ve jmenovateli $\sqrt[3]{x}$, užijeme spojitost logaritmu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\log(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \sqrt{x} + \log(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})}{\log \sqrt[3]{x} + \log(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \log x + \log(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})}{\frac{1}{3} \log x + \log(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} + \log(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})/\log x}{\frac{1}{3} + \log(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})/\log x} &= \frac{\frac{1}{2} + 0}{\frac{1}{3} + 0} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + 3^x)}{\log(1 + 2^x)}$

Řešení:

V čitateli i jmenovateli jsou dominantními členy exponenciály. Vytkneme je tedy.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + 3^x)}{\log(1 + 2^x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log 3^x(3^{-x} + 1)}{\log 2^x(2^{-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log 3^x + \log(3^{-x} + 1)}{\log 2^x + \log(2^{-x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log 3 + \log(3^{-x} + 1)}{x \log 2 + \log(2^{-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log 3 + \log(3^{-x} + 1)/x}{\log 2 + \log(2^{-x} + 1)/x} \stackrel{AL}{=} \end{aligned}$$

Věta o limitě podílu a o limitě součtu dává (s přihlédnutím k faktu, že $0/\infty = 0$ a ke spojitosti logaritmu)

$$= \frac{\log 3 + 0/(+\infty)}{2 + 0/(+\infty)} = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Zkouškové příklady

2. Spočtete limity zadaných funkcí

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log \sqrt{1+x^2}}$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log \sqrt{1+x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\log \sqrt{1+x^2}} \\ &\stackrel{VOL}{=} -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = -1 \end{aligned}$$

Pro třetí výraz platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)}{1+x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x^2} + 1 = 2$$

Pro VOLSF máme (ve zkratce) podmínky:

První vnitřní funkce $\sin x \neq 0$ na $P(0, \frac{\pi}{2})$. (Z grafu.)

Druhá vnitřní funkce $\sqrt{1+x^2} \neq 1$ na $P(0, 1)$. Plyne z výpočtu $1+x^2 \neq 1$ na $P(0, 1)$.

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\log \left(1 + \frac{3}{x}\right)} (\log(1+x^3))^2$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\log \left(1 + \frac{3}{x}\right)} (\log(1+x^3))^2 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}} \cdot \sqrt{\frac{3}{x}} \cdot (\log(1+x^3))^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\log(1+x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \\ &\stackrel{VOL}{=} 1 \cdot \sqrt{3} \cdot 0. \end{aligned}$$

Platí

$$0 \leq \left(\frac{\log(1+x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \leq \left(\frac{\log(2x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 = \left(\frac{\log 2 + \log(x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$$

Pravá strana jde do 0 z aritmetiky limit a ze škály.

Dále máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}} = \sqrt{1},$$

z dvojitého použití VOLSF. Podmínka (P): $\frac{3}{x} \neq 0$ na $P(\infty, 5)$.

Pak podmínka (S): $\sqrt{y}$ je spojitá v 1.

(c) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})}$

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1 + \sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{2} \sin x} - 1}{\log^2(1 + \sqrt{x})} + \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1 + \sqrt{x})} \\&= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{2} \sin x} - 1}{\frac{1}{2} \sin x} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin x}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x})^2}{\log^2(1 + \sqrt{x})} + \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{(\sqrt{x})^2}{\log^2(1 + \sqrt{x})} \\&\stackrel{V_{OAL}}{=} 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

Podmínky pro VOLS (telegraficky):

1) (P) $\frac{1}{2} \sin x \neq 0$ na $P^+(0, \frac{\pi}{2})$ (z grafu).

3,4,5) (P) $\sqrt{x} \neq 0$ na $P^+(0, 3)$ (z grafu).

Bonus

3. Rozhodněte, zda platí

(FALSE) Nechť funkce $f(x)$ není shora omezená v žádném okolí $P(0, \delta)$. Pak $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

Řešení: Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pak $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ neexistuje, ale $f(x)$ je neomezená.

(TRUE) Nechť $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. Pak existuje okolí $P(0, \delta)$ takové, že funkce f je zdola omezená na $P(0, \delta)$.

Řešení: Jde o analogii věty o limitě a omezenosti.

Zvolme $\varepsilon = 1$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro $\forall x \in P(0, \delta)$ platí $f(x) \in B(\infty, 1) = (1, \infty)$.

Neboli $f(x) > 1$ na $P(0, \delta)$.

4. Nechť $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Ukažte, že

$$\begin{aligned}\max\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}, \\ \min\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.\end{aligned}$$

Řešení:

Rozborem případů. Nechť $f(x) \geq g(x)$. Pak $f(x) - g(x) \geq 0$ a $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

Dostáváme tedy

$$\frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) + f(x) - g(x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

Analogicky

$$\frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) - f(x) + g(x)}{2} = \frac{2g(x)}{2} = g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Pro $f(x) \leq g(x)$ máme $f(x) - g(x) \leq 0$ a $|f(x) - g(x)| = -f(x) + g(x)$ a tedy

$$\frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) - f(x) + g(x)}{2} = \frac{2g(x)}{2} = g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

Analogicky

$$\frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) + f(x) - g(x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$