11. cvičení – VOLSF + sin, cos, arcsin

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limity zadaných funkcí

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = 5$

   Řešení:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} 5\frac{\sin 5x}{5x} = 5\cdot 1 = 5.$$

   VOLSF: Vnitřní funkce $g(x) = 5x$, $\lim_{x\to 0} 5x = 0$. Vnější funkce $f(y) = \sin y/y$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$.
   Podmínka (P): $5x \neq 0$ na $P(0, 10)$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x^2}{x^2} = 3$

   Řešení:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\sin 3x^2}{3x^2} \overset{VOAL}{=} 3\cdot 1 = 3$$

   VOLSF, podmínka (P) a fakt, že $\lim_{x\to 0} 3x^2 = 0$.

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

   Řešení:

   Počítejme.

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1.$$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{1-\cos 4x^2} = \dfrac{1}{8}$

   Řešení:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{1-\cos 4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{16}\cdot\frac{(4x^2)^2}{1-\cos 4x^2} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{16}\cdot 2 = \frac{1}{8}.$$

   VOLSF, podmínka (P) a fakt, že $\lim_{x\to 0} 2x^2 = 0$.

   (e) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   Řešení:

   $$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

   VOLSF, podmínka (P) a $\sqrt{x}\to 0+$ pro $x\to 0+$.

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \sqrt{2}$

   Řešení:

   Počítejme

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}\frac{x^2}{\sqrt{x^4}} \overset{AL}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\cos x^2}{x^4}} = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

VOLSF, $x^2 \to 0$ pro $x \to 0$, (P).
VOLSF, vnější funkce $\sqrt{y} \to 1/\sqrt{2}$ pro $y \to 1/2$, podmínka (S).

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin \dfrac{1-x}{1+x} = -\dfrac{\pi}{2}$
Řešení: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$, konkrétně $-1+$ (jdeme do -1 zprava). Z VOLSF, spojitost arcsin v $-1+$, pak máme

$$\lim_{x\to\infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x} = -\frac{\pi}{2},$$

neb $\arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$.

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \ln \left(\dfrac{x}{\sin x}\right) = 0$
Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

pak VOLSF, spojitost logaritmu v 1 dává

$$\lim_{x\to 0} \ln \left(\frac{x}{\sin x}\right) = 0,$$

neboť $\lim_{x\to 1} \ln x = 0$.

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x} - x) = \dfrac{\pi}{3}$
Řešení: Prve upravme odmocniny

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2}$$

Z VOLSF a spojitosti arccos v bodě $\frac{1}{2}$ máme

$$\lim_{x\to\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x} - x) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} 3x = \dfrac{1}{3}$
Řešení: Počítejme.

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg} 3x = \lim_{x\to 0} x \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{\cos 3x}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

VOLSF, $3x \to 0$ pro $x \to 0$, (P).

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$
Řešení: Všimneme si, že počítáme limitu v ∞.
Protože $-1 \le \sin x \le 1$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, platí:

$$0 \xleftarrow{x\to\infty} -\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0,$$

a tedy musí být podle věty o srovnání (=2 policajti).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

(l) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}$

Řešení:

Počítejme.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{\sin^3 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x \cos x} =$$

Nyní vhodně rozšíříme

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}}{1^2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}.$$

(m) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = 2$

Řešení:

Zlomek roztrhneme na dva a vhodně rozšíříme.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin x} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin x}{x}} \cdot 5 - \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}} \cdot 3 = \frac{1}{1} \cdot 5 - \frac{1}{1} \cdot 3 = 2.$$

VOLSF, vnitřní funkce $3x$ a $5x$, podmínka (P).

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = 4$

Řešení: Přičteme a odečteme „chytrou jedničku“, zlomek roztrhneme na dva a vhodně rozšíříme.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{1-\cos x - (1-\cos 3x)}{x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{(3x)^2} \cdot 9 = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 4.$$

VOLSF, vnitřní funkce $3x$, podmínka (P).

(o) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$

Řešení: Nejprve si výraz trochu zjednodušme.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos 2x} \cdot \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} =$$

Limity roztrhneme a vyřešíme zvlášť.

S přihlédnutím k faktu, že $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ a $\cos 0 = 1$ dostaneme

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos(\frac{\pi}{4} - x)} = \frac{\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4}}{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})} = 1$$

Pro druhý zlomek použijeme substituci $y = \frac{\pi}{4} - x$.

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\cos 2(\frac{\pi}{4} - y)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\cos(\frac{\pi}{2} - 2y)} =$$

Dále užijeme součtový vzorec $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ na jmenovatel.

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\cos\frac{\pi}{2}\cos 2y + \sin\frac{\pi}{2}\sin 2y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\sin 2y} =$$

Rozšíříme.

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\sin y}{y}}{\frac{\sin 2y}{2y}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Limitu před substitucí pak vyřešíme pomocí VOLSF.
$f(g(x)) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}$, $f(y) = \frac{\sin y}{\cos 2(\frac{\pi}{4}-y)}$, $g(x) = \frac{\pi}{4} - x$. Podmínka (P), tedy dohromady

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

Závěr: z aritmetiky limit je:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$$

.

(p) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \cos a$

Řešení: Počítejme.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = 1\cdot\cos\frac{a+a}{2} = \cos a.$$

(q) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = -3$

Řešení:
Trik je v použití metod na rozklad kvadratického trojčlenu (třeba počítáním kořenů kvadratické rovnice nebo uhodnutím). Zde platí

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = -3.$$

(r) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \frac{1}{4}$

Řešení:
Počítejme. Nejprve se vypořádáme s odmocninami.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{tg} x - 1 - \sin x}{x^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}}$$

Máme

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{2}.$$

Pro druhou limitu pak platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\cos x}=\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\overset{VOAL}{=}\frac{1}{2}.$$

Celkem pro původní limitu dostaneme z VOAL $\frac{1}{4}$.

(s) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\frac{4}{3}$

Řešení:

Počítejme. Nejprve se vypořádáme s odmocninami.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}\cdot\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}\cdot\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{1}$$

$$=\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{1}$$

$$\overset{VOAL}{=}2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=2\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}.$$

(t) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$, kde $m,n\in\mathbb{N}$

Řešení:

Substituujeme $y=x-\pi$. Jestliže $x\to\pi$, potom $y\to 0$, a tedy platí.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin m(y+\pi)}{\sin n(y+\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(my+m\pi)}{\sin(ny+n\pi)}=$$

Nyní použijeme součtový vzorec $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ a přihlédneme k faktu, že $\cos m\pi=(-1)^m$ a $\sin m\pi=0$ pro libovolné m přirozené.

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin my\cos m\pi+\sin m\pi\cos my}{\sin ny\cos n\pi+\sin n\pi\cos ny}=\lim_{y\to 0}\frac{(-1)^m\sin my}{(-1)^n\sin ny}=$$

Nyní jrozšíříme, použijeme větu o aritmetice limit a VOLSF:

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(-1)^m\frac{\sin my}{my}}{(-1)^n\frac{\sin ny}{ny}}\cdot\frac{m}{n}=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

(u) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{\operatorname{arccot} x}=\infty$

Řešení: $\lim_{x\to\infty}\arctan=\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\infty}\operatorname{arccot}=0+$. Pak

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{\operatorname{arccot} x}=\frac{\frac{\pi}{2}}{0+}=\infty.$$

Zkouškové příklady

2. Spočtěte limity zadaných funkcí

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\arctan(\arcsin x)}$

   Řešení:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\arctan(\arcsin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\arcsin x}{\arctan(\arcsin x)} \cdot \frac{x}{\arcsin x} \overset{VOAL}{=} 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$$

   VOLSF 1: $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, $g(x) = \tan x$, (P) $\tan x \neq 0$ na $P(0, \frac{\pi}{4})$.
   VOLSF 2: $f(y) = \frac{y}{\arctan y}$, $g(x) = \arcsin x$, (P) $\arcsin x \neq 0$ na $P(0, \frac{1}{4})$.

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\arctan x)}{x^2}$

   Řešení:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\arctan x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\arctan x)}{(\arctan x)^2} \lim_{x\to 0} \frac{(\arctan x)^2}{x^2} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

   VOLSF: $f(y) = \frac{1-\cos y}{y^2}$, $g(x) = \arctan x$, $\arctan x \neq 0$ na $P(0, 42)$.

   (c) $\lim_{x\to\infty} x^{5/2} \arcsin(\sqrt{x^5+1} - \sqrt{x^5-1})$

   Řešení: Nejprve rozšíříme argument arcsinu.

   $$\sqrt{x^5+1} - \sqrt{x^5-1} = (\sqrt{x^5+1} - \sqrt{x^5-1}) \cdot \frac{(\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1})}{(\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1})} = \frac{2}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}$$

   Pak původní limita:

   $$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x^{5/2} \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}} \cdot \frac{2x^{5/2}}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+1/x^5} + \sqrt{1-1/x^5}} \\ &\overset{VOAL}{=} 1 \cdot \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

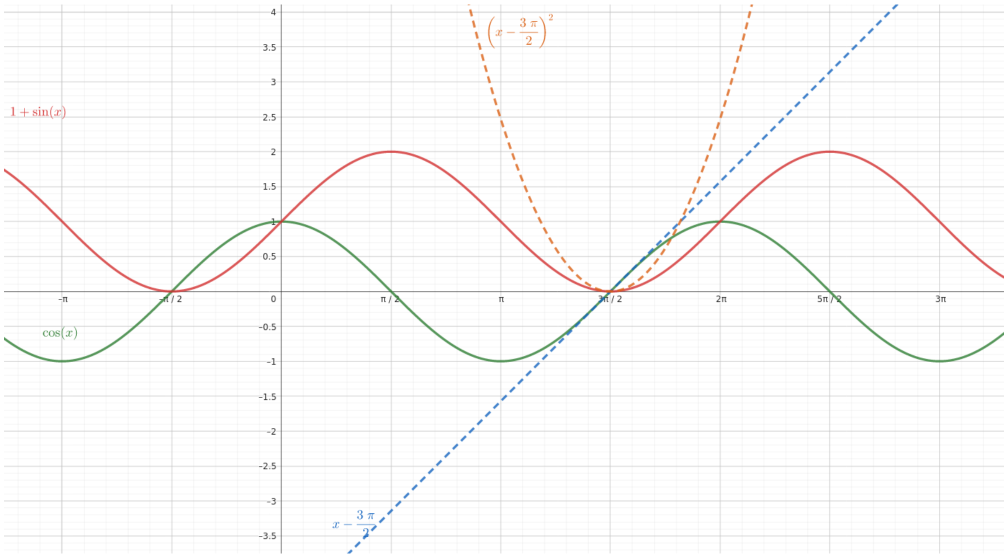
   VOLSF: $f(y) = \frac{\arcsin y}{y}$, $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}$, $g(x) \neq 0$ na $P(\infty, \frac{1}{2})$.

   (d) $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2) \frac{\cos x}{1+\sin x}$

   Řešení:

   $$\begin{aligned} \lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2) \frac{\cos x}{1+\sin x} &= \lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{(x-\frac{3\pi}{2})^2}{1+\sin x} \cdot \frac{4x^2 - 9\pi^2}{x - \frac{3\pi}{2}} \\ &= \lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{(x-\frac{3\pi}{2})^2}{1+\sin x} \cdot \frac{(2x-3\pi)(2x+2\pi)}{x - \frac{3\pi}{2}} \\ &\overset{VOAL}{=} 1 \cdot 2 \cdot 12\pi = 24\pi \end{aligned}$$

   Limity plynou z obrázku a vlastností sin a cos.



(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\arctan(\sqrt{x^2+\sin^2 x}-\sqrt{x^2-\cos^2 x})}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}$

Řešení: Nejprve rozšíříme odmocniny.

$$\sqrt{x^2+\sin^2 x}-\sqrt{x^2-\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}$$

$$\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}$$

Pak

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(\sqrt{x^2+\sin^2 x}-\sqrt{x^2-\cos^2 x})}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+2/x^2}+\sqrt{1+1/x^2}}{\sqrt{1+(\sin^2 x)/x^2}+\sqrt{1-(\cos^2 x)/x^2}} \\
&\overset{VOAL}{=} 1 \cdot \frac{2}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Jednotlivé limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2} = 0$$

podle věty o omezené a mizející funkci.

$$\sqrt{1+2/x^2} \to 1, \quad \sqrt{1+1/x^2} \to 1, \quad \sqrt{1+(\sin^2 x)/x^2} \to 1, \quad \sqrt{1-(\cos^2 x)/x^2} \to 1.$$

VOLSF (S) vnější funkce $\sqrt{y}$ je spojitá v 1.

VOLSF 2: vnější funkce $(\arctan y)/y$, vnitřní funkce $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}$
Navíc $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Ze dvou policajtů a odhadů

$$x^2 \leq x^2 + \sin^2 x, \qquad x^2 - 1 \leq x^2 - \cos^2 x$$

máme

$$x^2 + \sin^2 x \to \infty, \qquad x^2 - \cos^2 x \to \infty.$$

$x^2 + \sin^2 x \neq \infty$ i $x^2 - \cos^2 x \neq \infty$, tedy je splněna podmínka (P) pro limity

$$\sqrt{x^2 + \sin^2 x} \to \infty, \qquad \sqrt{x^2 - \cos^2 x} \to \infty.$$

Dohromady z aritmetiky limit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}} = 0.$$

Navíc

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}} \neq 0,$$

tedy z podmínky (P)

$$\frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}} = 1.$$

Bonus

3. Existuje spojitá funkce taková, že $\lim_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje, ale $\lim_{n\to\infty} f(n)$ ano?
Řešení: Např. $f(x) = \sin(\pi x)$. Pak $\lim_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje, ale $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \sin(\pi n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

4. Sestrojte funkci definovanou na celém $\mathbb{R}$, která ale má limitu pouze v 0 (v ostatních bodech limita neexistuje).
Řešení: $f(x) = xD(x)$, kde $D(x)$ je Dirichletova funkce.

5. Nechť $f : [0,1] \to [0,1]$ je bijekce. Rozhodněte, zda je pak f spojitá alespoň v jednom bodě.
Řešení: Nemusí být. Uvažujme funkci jako na obrázku, kde červená plná zobrazuje racionální body a žlutá čerchovaná iracionální.