10. cvičení – Limita funkce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Z grafu

1. (a) $\lim_{x\to\infty} x = \infty$
   (b) $\lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$
   (c) $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
   (d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$
   (e) $\lim_{x\to0+} \sqrt{x} = 0$
   (f) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
   (g) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$
   (h) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\ \nexists$
   (i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
   (j) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = \infty$
   (k) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$
   (l) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
   (m) $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$
   (n) $\lim_{x\to0+} \log x = -\infty$
   (o) $\lim_{x\to\infty} \sin x\ \nexists$
   (p) $\lim_{x\to0} \cos x = 1$
   (q) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$
   (r) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = \infty$
   (s) $\lim_{x\to0+} \cot x = \infty$
   (t) $\lim_{x\to0-} \cot x = -\infty$

Z definice

2. Určete z **definice** následující limity (či jejich neexistenci)

   (a) $\lim_{x\to2}(x+2) = 4$
   Řešení: Je $f(x) = x+2$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pomocí tohoto ε stačí určit $\delta > 0$ takové, aby všechna x z prstencového okolí $(2-\delta, 2+\delta) \setminus \{2\}$ bodu 2 splňovala nerovnost

   $$|f(x) - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x+2) - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \varepsilon. \qquad (*)$$

   Tuto nerovnici umíme vyřešit. Jejím řešením jsou všechna x z intervalu $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$. Z toho je vidět, že stačí položit $\delta = \varepsilon$, neboť potom

   $$x \in (2-\delta, 2+\delta) \implies x \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \implies x \text{ splňuje nerovnici } (*)$$

   $$\implies \text{tvrzení o limitě je dokázáno.}$$

   (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$
   Řešení: Volme $\varepsilon > 0$. Chceme najít K takové, aby pro všechna $x \geq K$ bylo

   $$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

   Nerovnici upravíme na vhodnější tvar pro její řešení.

   $$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x-(x+1)}{x+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{x+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x+1}\right| < \varepsilon.$$

   Protože pro x hledáme okolí $+\infty$, můžeme se omezit na kladná x a tím zrušit absolutní hodnotu. Pak je vidět, že při tomto omezení jsou řešením rovnice všechna x kladná taková, že $x+1 > \frac{1}{\varepsilon}$ a tedy $x > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Stačí tedy volit libovolné $K > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ (popřípadě $K > 0$, pokud $\frac{1}{\varepsilon} < 1$).

(c) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$

Řešení: Volme K reálné a omezme se na $K > 0$. Chceme najít δ tak, aby pro všechna $x \in (2-\delta, 2+\delta) \setminus \{2\}$ platilo, že

$$\frac{1}{|x-2|} \geq K \Leftrightarrow |x-2| \leq \frac{1}{K}.$$

Odtud vyplývá, že stačí volit libovolné kladné $\delta < \frac{1}{K}$.

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ $\nexists$

Řešení: V bodě nula funkce $\frac{1}{x}$ nemůže mít limitu, protože $\frac{1}{x} < \frac{-1}{\delta}$ na $(-\delta, 0)$ a $\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta}$ na $(0, \delta)$. Pro každé reálné číslo L tedy najdeme δ tak, že L neleží v $f(-\delta, +\delta)$. Je-li pak L kladné nekonečno, potom $U = (1, +\infty)$ je okolím L, ale $f(-\delta, +\delta)$ není podmnožinou U dokonce pro žádné $\delta > 0$ (obsahuje totiž také záporná čísla). Obdobně vyloučíme záporné nekonečno.

Vyšetříme tedy jednostranné limity. Protože hodnoty $\frac{1}{x}$ se zvětšují, jdeme-li k nule zprava, máme podezření, že limita zprava bude $+\infty$. Chceme tedy dokázat, že pro libovolné $K > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $f(x) \geq K$, pokud $x \in (0, \delta)$. Buď tedy $K > 0$ libovolné reálné číslo. Řešením nerovnice (uvědomte si, že $x, K > 0$)

$$f(x) \geq K \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq K \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{K},$$

dostáváme, že stačí volit $\delta < \frac{1}{K}$. Tím je důkaz hotov, $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Důkaz, že $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, by probíhal obdobně. Neexistence limity v nule pak též plyne z nerovnosti jednostranných limit.

(e) $\lim_{x\to 0+} \sin \frac{1}{x}$ $\nexists$

Řešení: Volme libovolné pravé prstencové okolí nuly $(0, \delta)$. Uvažme body $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Je-li n dost velké ($\frac{1}{n\pi} < \delta$), pak $x_n \in (0, \delta)$ a $\sin x_n = 0$. Uvažme ještě body $y_m = \frac{1}{2m\pi + \frac{\pi}{2}}$. Opět pro m dost velké ($\frac{1}{2m\pi + \pi/2} < \delta$) je $y_m \in (0, \delta)$ a $\sin y_m = 1$. Je tedy vidět, že v libovolném okolí $(0, \delta)$ najdeme body, v nichž funkce $\sin \frac{1}{x}$ nabývá hodnot nula a jedna, limita zprava tedy nemůže existovat. Důkaz neexistence limity zleva probíhá analogicky, jen u před x_n a y_m napíšeme minus.

Přímo

3. (a) $\lim_{x\to 3} \frac{3x+2}{-x+1} = \frac{3\cdot 3+2}{-3+1} = \frac{-11}{2}$

(b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-4)^2} = \text{“}\frac{1}{\infty}\text{”} = 0$

(d) $\lim_{x\to-\infty} (x+3)^2 = (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty$

(e) $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{-8-x} = \text{“}\frac{-3}{-\infty}\text{”} = 0$

(f) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x+1} = \text{“}\frac{1}{\infty}\text{”} = 0$

(g) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x} = \infty + \infty$

1/0

4. Spočtěte limity, příp. jednostranné limity.

(a) $\lim_{x\to 5} \frac{6}{x-5}$

Řešení: Dle Věty 4, aplikovanou na jednostranné limity. Zprava: $f(x) = 6$, $\lim_{x\to 5+} f(x) = 6$, $6 > 0$. $g(x) = x - 5$, $\lim_{x\to 5+} g(x) = 0$, $x - 5 > 0$ na $(5, 5 + 1)$. Tedy $\lim_{x\to 5+} \frac{f}{g} = \infty$.

Zleva: $f(x) = 6$, $\lim_{x\to 5-} f(x) = 6$, $6 > 0$. $g(x) = x - 5$, $\lim_{x\to 5-} g(x) = 0$, $x - 5 < 0$ na $(5 - 1, 5)$. Tedy $\lim_{x\to 5-} \frac{f}{g} = -\infty$.

Závěr: $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{6}{x-5}$ neexistuje.

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{2}{(x-2)^2}$

Řešení: Máme $f(x) = 2$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 2 > 0$. Navíc $g(x) = (x - 2)^2$, $g(x) > 0$ na $P(2, 3)$. Z věty $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2}{(x-2)^2} = \infty$

(c) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2}{x^2-16}$

Řešení: (Příklad převzat tu: http://www2.gcc.edu/dept/math/faculty/BancroftED/teaching/handouts/limit_examples_from_class.pdf)

Máme $f(x) = x^2$, $\lim_{x\to 4+} f(x) = 16 > 0$. Navíc $g(x) = x^2 - 16$, $g(x) > 0$ na $(4, 5)$. Z věty je $\displaystyle\lim_{x\to 4+} \frac{x^2}{x^2-16} = \infty$.

Zleva pak $g(x) = x^2 - 16$, $g(x) < 0$ na $(3, 4)$. Z věty je $\displaystyle\lim_{x\to 4+} \frac{x^2}{x^2-16} = -\infty$.

Závěr: limita neexistuje.

(d) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+6x+9}$ **Řešení:** (Příklad převzat tu: http://www2.gcc.edu/dept/math/faculty/BancroftED/teaching/handouts/limit_examples_from_class.pdf)

Limitu lze rozložit

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+6x+9} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)^2}.$$

Nyní lze psát $f(x) = (x-3)(x+1)$, $\lim_{x\to -3} f(x) = 12 > 0$. Navíc $g(x) = (x+3)^2$, $g(x) > 0$ na $P(-3, 42)$. Z věty $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)^2} = \infty$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x}$

Řešení: Máme $f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 > 0$. Navíc $g(x) = \sin x$, $g(x) > 0$ na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Z věty je $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sin x} = \infty$.

Zleva pak $f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1 > 0$. Navíc $g(x) = \sin x$, $g(x) < 0$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Z věty je $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{1}{\sin x} = -\infty$.

Závěr: limita neexistuje.

0/0

5. Vytkněte výraz s kořenem,

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1}$

Řešení: Rozložíme na

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+4)}{(x-1)}.$$

Podle předchozího cvičení dostaneme

$$\lim_{x\to 1+} \frac{(x+4)}{(x-1)} = +\infty$$

a

$$\lim_{x\to 1-} \frac{(x+4)}{(x-1)} = -\infty$$

Limita tedy neexistuje.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x}{2x^3+x^2-2x}$

Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x}{2x^3+x^2-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{x^2-2x+1}{2x^2+x-2} \overset{VOAL}{=} \frac{0-0+1}{0+0-2} = -\frac{1}{2}$$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$

Řešení: Rozložíme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+5)}{(x-1)}.$$

Dle předchozího cvičení vyjde

$$\lim_{x\to 1+} \frac{(x+5)}{(x-1)} = \infty$$

a

$$\lim_{x\to 1-} \frac{(x+5)}{(x-1)} = -\infty$$

Závěr: limita neexistuje.

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

Řešení: Platí, že $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$ a $2x^2-x-1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$. Platí tedy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

Řešení: Snadno se ověří, že jednička je kořen, dokonce dvojnásobný. Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{1}{2}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

Rozložte polynomy na součin a pak teprve umocněte.

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{[(x-2)^2]^{10}(x+4)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} = \frac{3^{20}}{6^{10}} = \frac{3^{10}}{2^{10}}.$$

6. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Pro $x > 0$ máme

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Protože $\lim_{x\to\infty} \pm\frac{1}{x} = 0$, tak i

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\cos x$

Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Máme

$$-e^{-x} \leq e^{-x}\cos x \leq e^{-x}.$$

Protože $\lim_{x\to\infty} \pm e^{-x} = 0$, tak i

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x = 0.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x^3\sin(x^2)$

Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Pro $x > 0$ máme

$$-x^3 \leq x^3 \sin x^2 \leq x^3$$

Pro $x < 0$ máme

$$x^3 \leq x^3 \sin x^2 \leq -x^3$$

Dohromady můžeme psát

$$0 \leq |x^3 \sin x^2| \leq |x^3|$$

Protože $\lim_{x\to 0} |x^3| = 0$, tak i

$$\lim_{x\to 0} x^3\sin(x^2) = 0.$$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$

Řešení: Vytkneme nejrychlejší člen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} \overset{VOAL}{=} \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Limita $\lim_{x\to\infty} \sin x/x = 0$ podle prvního příkladu.

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} x\cos\left(\dfrac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right)$

Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Máme

$$-x \leq x\cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right) \leq x$$

Protože $\lim_{x\to 0} \pm x = 0$, tak i

$$\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right) = 0.$$

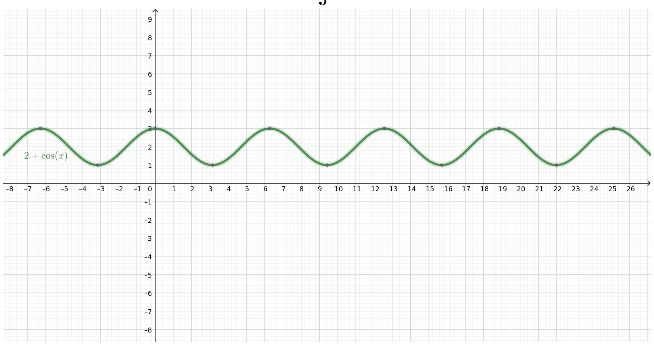
(f) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Řešení: Vytkneme nejrychlejší člen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \overset{VOAL}{=} \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

(g) $\lim_{x\to\infty} (2 + \cos x)$

Řešení: Limita neexistuje:



(h) $\lim_{x\to\infty} x + \sin x$

Řešení: Z jednoho policajta

$$x - 1 \le x + \sin x$$

Navíc

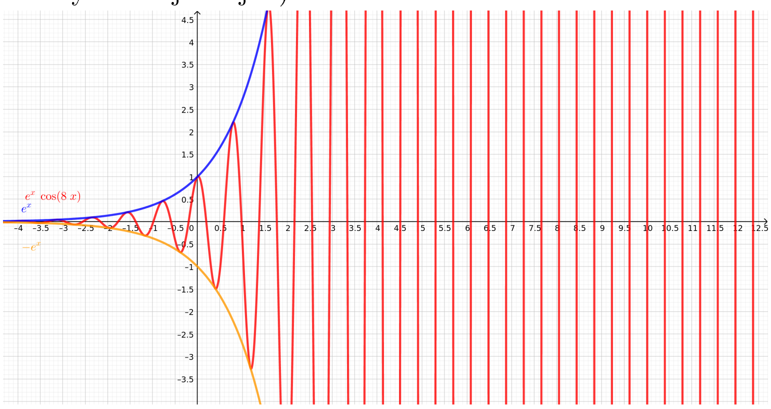
$$\lim_{x\to\infty} x - 1 = \infty,$$

tedy i

$$\lim_{x\to\infty} x + \sin x = \infty.$$

(i) $\lim_{x\to\infty} e^x \cos x$

Řešení: Limita neexistuje. Graf (na obr. je kvůli názornosti funkce $e^x \cos(8x)$, ale myšlenka je stejná):



(j) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x} \overset{VOAL}{=} \frac{0}{1} = 0.$$

(k) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sin x}$
Řešení: Limita neexistuje. Funkce $\frac{x}{\sin x}$ není definována v bodech $k\pi$. Což znamená, že pro dané ε nejsme schopni najít žádné δ-okolí bodu ∞, kde by funkce byla definovaná. Kvůli tomu ovšem nedokážeme ověřit definici limity.

7. Spočtěte limity

(a) $\lim_{x\to\infty} x^3 - x^2 + 3x - 8$
Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - x^2 + 3x - 8 = \lim_{x\to\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3}\right) \overset{VOAL}{=} \infty(1 - 0 + 0 - 0) = \infty.$$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{1} = 1$$

Limita $\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ se spočítá pomocí limity složené funkce. Vnitřní funkce je $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, vnější $f(y) = \sqrt{y}$. Pro limity platí

$$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 + 0 = 1$$

a

$$\lim_{y\to 1} \sqrt{y} = \sqrt{1} = 1.$$

Platí podmínka (S): vnější funkce $f(y) = \sqrt{y}$ je spojitá v bodě 1.

(c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$
Řešení:
Rozšíříme

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \overset{VOAL}{=} \frac{2}{\infty+\infty} = 0.$$

Platí, že $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} = \infty$ protože $g(x) = x+2$, $f(y) = \sqrt{y}$. Navíc $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty + 2 = \infty$ a $\lim_{y\to\infty} = \infty$. Platí podmínka (P), protože $x + 2 \neq \infty$ na okolí $P(\infty, 1)$.

(d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = \lim_{x\to-\infty} -1 \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = -1.$$

(e) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$
Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x} \overset{VOAL}{=} \infty + \infty$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Řešení: Rozšíříme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

(g) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

Řešení: Rozšíříme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} &= \lim_{x\to -2} \frac{x-6+2^3}{(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+2^2)(x^3+8)}\\ &= \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)(x+2)(x^2-2x+4)}\\ &= \lim_{x\to -2} \frac{1}{(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)(x^2-2x+4)}\\ &\overset{VOAL}{=} \frac{1}{(4+4+4)(4+4+4)} = \frac{1}{144}.\end{aligned}$$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

Řešení: Rozšíříme

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

8. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, kde $m,n\in\mathbb{N}$

Řešení: Rozložíme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1} = \frac{m}{n}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$, kde $n\in\mathbb{N}$

Řešení: Číslo n tu hraje roli pevně daného čísla, parametru. Postupnými rozklady dostaneme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+\ldots+(x^n-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1+(x+1)+(x^2+x+1)+(x^3+x^2+x+1)+\ldots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1+2+3+4+\ldots+n}{1} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

9. Najděte příklad funkce (stačí obrázkem), která:

(a) Nemá limitu v nekonečnu.
Řešení: $f(x) = \cos x$

(b) Nemá limitu v čísle 3.
Řešení: $f(x) = \frac{1}{x-3}$

(c) Má v nekonečnu limitu nekonečno.
Řešení: $f(x) = x$

(d) Má v nekonečnu limitu -2.
Řešení: $f(x) = -2 + \frac{1}{x}$

(e) Nemá limitu v 0, ale její absolutní hodnota ano.
Řešení: $f(x) = \operatorname{sgn} x$

(f) Není spojitá v 0.
Řešení: $f(x) = \operatorname{sgn} x$

(g) Je nespojitá v nekonečně mnoha bodech.
Řešení: $f(x) = \tan x$

(h) Má vlastní limitu v nekonečnu a je rostoucí.
Řešení: $f(x) = \arctan x$

10. Proč ten vtip není dobře?

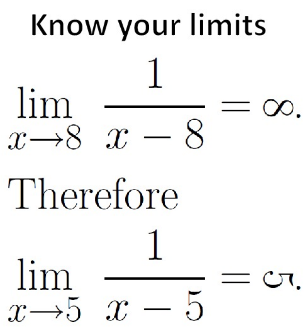


Figure 1: https://kityates.com/public-engagement/

Řešení: Protože $\lim_{x\to 8} \frac{1}{x-8}$ neexistuje - zprava je ∞ a zleva $-\infty$.

11. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$. Rozhodněte zda platí:
a) Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Potom $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.
Řešení: Ano - aritmetika limit.
b) Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Potom je buď $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ nebo $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
Řešení: Ne - např. pro funkci $f(x) = x$ v 0 dostaneme $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists$.
c) Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a $f \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí a. Potom je $\lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$.
Řešení: Tvrzení platí. Jde-li $f(x) \to 0$ v bodě a, pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje prstencové okolí bodu a tak, že $|f(x)| < \varepsilon$. Je-li nyní $K > 0$, pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $K < \frac{1}{\varepsilon}$ a podle předchozího najdeme prstencové okolí a tak, že $\frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{\varepsilon} > K$ pro x z tohoto prstencového okolí.

d1) Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Potom vždy existují obě jednostranné limity $\lim_{x\to a+} \frac{1}{f(x)}$ a $\lim_{x\to a-} \frac{1}{f(x)}$, nemusí se však rovnat.

Řešení: Tvrzení neplatí. Stačí vzít $f \equiv 0$ - pak $1/f$ není definována, nelze jí tedy počítat limitu.

d2*) Co když navíc požadujeme, aby $f(x) \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí bodu a ?

Řešení:

Tvrzení neplatí. Uvažte příklad funkce $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, která v nule konverguje do nuly (je to nulová krát omezená) a tuto funkci předefinujme $f(\frac{1}{n\pi}) = \frac{(-1)^n}{n\pi}$, kde n jsou celá čísla (tedy v nulových bodech sinu). Potom z odhadu $|f(x)| \leq |x|$ opět plyne konvergence do nuly a funkce je dokonce různá od nuly na $\mathbb{R}$. Přitom $\frac{1}{f}$ nabývá libovolně velkých i libovolně malých hodnot na jakémkoli jednostranném okolí nuly.

12. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

Řešení:

Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1.$$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

Řešení:

Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

Řešení:

Rozšířením dostaneme

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1+2x-9}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x\to 4} 2\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}$$

$$= 2 \cdot \frac{2+2}{3+3} = \frac{4}{3}.$$

(d) $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, kde $a > 0$

Řešení:
Úpravou dostaneme

$$\lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} \overset{AL}{=} \lim_{x\to a+} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}} =$$

$$= \lim_{x\to a+} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} + 1 \right) \overset{AL}{=} \frac{1}{\sqrt{2a}}(0+1) = \frac{1}{\sqrt{2a}},$$

neboť

$$\lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} = \lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \lim_{x\to a+} \frac{x-a}{\sqrt{x-a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} =$$

$$= \lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x-a}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \overset{AL}{=} \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a}} = 0.$$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

Řešení:
Počítejme

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} =$$

vytknutím $\sqrt{x}$ v čitateli i jmenovateli a krácením dostaneme

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to0+} \left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}} \right)$

Řešení:
Rozšiřujeme.

$$\lim_{x\to0+} \frac{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}} - \left(\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}} + \sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}} = \lim_{x\to0+} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}} + \sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

Vytknutím $\sqrt{1/x}$ v čitateli i jmenovateli a zkrácením dostaneme

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}} + \sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} + \sqrt{1-\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}} = \frac{2}{2} = 1.$$

V příkladu je možné i provést substituci $\frac{1}{x} = y$. (Technicky jde o VOLSF.) Přitom je důležité, že původní limita je jednostranná, totiž že $x \to 0+$, a proto $y = \frac{1}{x} \to +\infty$. Příklad se pak převede na výpočet

$$\lim_{y\to+\infty} \left(\sqrt{y + \sqrt{y+\sqrt{y}}} - \sqrt{y - \sqrt{y+\sqrt{y}}} \right)$$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/3} \left[(x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3} \right]$

Řešení:

Rozšířením dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/3}[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}] = \lim_{x\to\infty} x^{1/3}\cdot \frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^{4/3}+(x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}+(x-1)^{4/3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x\cdot x^{1/3}}{(x+1)^{4/3}+(x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}+(x-1)^{4/3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{(1+\frac{1}{x})^{4/3}+(1+\frac{1}{x})^{2/3}(1-\frac{1}{x})^{2/3}+(1-\frac{1}{x})^{4/3}} \overset{AL}{=} \frac{4}{1+1+1} = \frac{4}{3}.$$