



9. cvičení – Rekurentně zadaná posloupnost, celá část

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Celá část

Příklady

1. Spočtete limity s celou částí

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$

Řešení: Použijeme odhady

$$\sqrt{n} - 1 < [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$$

Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1} = 1$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1.$$

Ze dvou policajtů pak i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} = 1.$$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{n}$

Řešení: Odhadneme

$$\frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2} - 1 + \frac{n}{2} - 1}{n} \leq \frac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{n} \leq \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2} + \frac{n}{2}}{n}$$

Limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2} - 1 + \frac{n}{2} - 1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{3}{n} + 1 \right)}{2n} = \frac{1}{2}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2} + \frac{n}{2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n}}{n} + 1 \right)}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ze dvou policajtů máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{n} = \frac{1}{2}.$$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$

Řešení: Máme odhad

$$2 \log n = \frac{n \log n}{\frac{n}{2}} \leq \frac{n \log n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \log n = \infty$, tak i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\left[\frac{n}{2}\right]} = \infty$ z věty o uspořádání.

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - \left\lfloor \frac{n^3}{100} \right\rfloor \cdot 100}{\sqrt{n}}$$

Řešení: (příklad převzat z <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>)

Odhadneme

$$0 = \frac{n^3 - \frac{n^3}{100} \cdot 100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left\lfloor \frac{n^3}{100} \right\rfloor \cdot 100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left(\frac{n^3}{100} - 1 \right) \cdot 100}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{n}}$$

Protože i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{\sqrt{n}} = 0,$$

tak ze dvou policajtů je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - \left\lfloor \frac{n^3}{100} \right\rfloor \cdot 100}{\sqrt{n}} = 0.$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} \right]$$

Řešení: (příklad převzat z <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>)

Výraz $a_n = \sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}$ lze upravit na

$$\begin{aligned} & \frac{6n^2}{(n^3 + 8n^2)^{2/3} + (n^3 + 8n^2)^{1/3}(n^3 + 2n^2)^{1/3} + (n^3 + 2n^2)^{2/3}} \\ &= \frac{6}{\left(1 + \frac{8}{n}\right)^{2/3} + \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/3} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2/3}} \end{aligned}$$

Limita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\left(1 + \frac{8}{n}\right)^{2/3} + \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/3} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2/3}} = 2$$

Protože limita je rovna 2, tak od jistého n_0 máme $a_n \geq 1$.

Protože máme nerovnost

$$3 < \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{2/3} + \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/3} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2/3}$$

tak dále platí, že

$$a_n < \frac{6}{3} = 2.$$

Dohromady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n] = 1.$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} \right] \cdot \frac{(n^2 + n + 1)^{10} - (n + 1)^{20}}{(n^2 + 1)^{10} - (n + 1)^{20}}$$

Řešení:

Prve spočteme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n + 1)^{10} - (n + 1)^{20}}{(n^2 + 1)^{10} - (n + 1)^{20}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^{20} + 10n^{19} + 55n^{18} + \dots + 1) - (n^{20} + 20n^{19} + 190n^{18} + \dots + 1)}{(n^{20} + 10n^{18} + \dots + 1) - (n^{20} + 20n^{19} + 190n^{18} + \dots + 1)} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{19}}{n^{19}} \cdot \frac{(10 + \frac{55}{n} + \dots \frac{1}{n^{19}}) - (20 + \frac{190}{n} + \dots \frac{1}{n^{19}})}{(\frac{10}{n} + \dots \frac{1}{n^{19}}) - (20 + \frac{190}{n} + \dots \frac{1}{n^{19}})} = \frac{-10}{-20} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pomocí předchozího příkladu a aritmetiky limit dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} \right] \cdot \frac{(n^2 + n + 1)^{10} - (n + 1)^{20}}{(n^2 + 1)^{10} - (n + 1)^{20}} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\sqrt{n^3 + 1} \right] + \left[\sqrt{n^3 - 1} \right]}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}}$$

Řešení: (příklad převzat z <https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematika-analyza>)

Prve odhadneme

$$\left[\sqrt{n^3 + 1} \right] + \left[\sqrt{n^3 - 1} \right] \geq \sqrt{n^3 + 1} + \sqrt{n^3 - 1} - 2 \geq \sqrt{n^3 + 1} - 2 \geq \sqrt{n^3} - 2$$

a

$$\sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n} \leq \sqrt[n]{n^n + n^n + \dots + n^n} = n \sqrt[n]{n}$$

Dohromady máme

$$\frac{\left[\sqrt{n^3 + 1} \right] + \left[\sqrt{n^3 - 1} \right]}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}} \geq \frac{\sqrt{n^3} - 2}{n \sqrt[n]{n}}$$

Navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3} - 2}{n \sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \frac{2}{n}}{\sqrt[n]{n}} = \infty.$$

Tedy z věty o uspořádání je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\sqrt{n^3 + 1} \right] + \left[\sqrt{n^3 - 1} \right]}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}} = \infty$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n \right]$$

Řešení: (příklad převzat z <https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematika-analyza>)

Prve rozšíříme podle vzorce

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n &= \frac{4n^3}{\sqrt[4]{(n^4 + 4n^3)^3} + n \sqrt[4]{(n^4 + 4n^3)^2} + n^2 \sqrt[4]{(n^4 + 4n^3)} + n^3} \\ &= \frac{4}{\sqrt[4]{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^3} + \sqrt[4]{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^2} + \sqrt[4]{1 + \frac{4}{n}} + 1} \end{aligned}$$

Limita bez celé části $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -/4 = 1$.

Zároveň máme odhady

$$0 < \frac{4}{\sqrt[4]{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^3} + \sqrt[4]{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^2} + \sqrt[4]{\left(1 + \frac{4}{n}\right)} + 1} < 1$$

Celkem tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n \right] = 0$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}]}$$

Řešení: (příklad převzat z <https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematika-analyza>)

Prve odhadneme

$$[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}] \geq \sqrt{n} - 1 + 2\sqrt{n} - 1 + \dots - 1 + n\sqrt{n} - 1 = \sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2} - n$$

a

$$[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}] \leq \sqrt{n} + 2\sqrt{n} + \dots + n\sqrt{n} = \sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dohromady

$$\frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2}} \leq \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}]} \leq \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2} - n}$$

Spočteme limity

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n + n^{n+1}}{(n+1)^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt[n]{1 + n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n} \end{aligned}$$

Aplikujeme dva policajty:

$$2 \sqrt[n]{1 + n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n} \leq 2 \sqrt[n]{1 + n} \leq 2 \sqrt[n]{2n} \rightarrow 2 \cdot 1,$$

z druhé strany

$$2 \sqrt[n]{1 + n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n} \geq 2 \sqrt[n]{1} \rightarrow 2 \cdot 1.$$

Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2}} = 2.$$

Limitu horního policařta spočteme jako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)} \stackrel{V_{OAL}}{=} 2 \cdot 1.$$

Závěr: ze dvou policařtů

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}]} = 2$$

$$(j) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$$

Řešení: Zřejmě platí, že $kx - 1 \leq [kx] \leq kx$, a protože

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kx - 1) &= \frac{1}{n^2} (x(1 + \dots + n) - (1 + \dots + 1)) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(x \frac{n(n+1)}{2} - n \right) = x \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} \end{aligned}$$

a

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kx) = \frac{1}{n^2} (x(1 + \dots + n)) = \frac{1}{n^2} \left(x \frac{n(n+1)}{2} \right) = x \frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2},$$

je hledaná limita rovna $x/2$ podle věty o 2 policařtech.

Teorie

2. Buď dáno $x \in (0, \infty)$. Označme $[x]$ celou část čísla x a $\{x\} = x - [x]$ desetinný rozvoj čísla x . (Například $\{\pi\} = 0,1415926\dots$) Sestrojme posloupnost

$$\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \dots, \{nx\}, \dots$$

Dokažte, že:

- Je-li x celé, má posloupnost limitu 0.
- Je-li x racionální necelé, tj. $x = r/s$, má posloupnost hromadné body $0, \frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots, \frac{s-1}{s}$.
- Je-li x iracionální, vyplňují hromadné body posloupnosti celý interval $[0, 1]$.

Řešení:

- Posloupnost je konstantní, neboť pro libovolné celé x je nx celé číslo a tedy $\{kx\} = 0$.
- Pro jednoduchost předpokládejme, že r, s jsou nesoudělná. Proto není možné, aby kterékoli z čísel $\frac{r}{s}, \frac{2r}{s}, \dots, \frac{(s-1)r}{s}$ bylo celé. Dokonce ani není možné, abychom po dělení s dostali stejný zbytek; kdyby tomu tak u dvou čísel bylo, byl by dělitelný jejich rozdíl. To ale není možné, došlo by ke sporu s nesoudělností. Pak už stačí uvažovat jakékoli celé číslo $k \in \mathbb{Z}$. Pro něj platí $\{n \frac{r}{s}\} = \{(n+ks) \frac{r}{s}\}$, a tedy posloupnost obsahuje nekonečně členů rovných kterémukoli z „hromadných bodů“.
- Nechť a je libovolné číslo z intervalu $[0, 1]$ a volme $0 < \varepsilon < 1$. Stačí ukázat, že pro takto libovolně zvolené ε existuje člen posloupnosti $\{n\theta\}$, který se od a liší méně než o ε .

Podle následujícího příkladu lze nalézt přirozená čísla q, p tak, že $|q\theta - p| = \varepsilon_1 < \varepsilon$, přičemž $\varepsilon_1 > 0$, neboť θ není racionální. Mohou nastat dva případy:

1. $q\theta - p = \varepsilon_1$. Potom $\{q\theta\} = \varepsilon_1$. Dále $\{2q\theta\} = 2\varepsilon_1$ až po nějaké číslo $\{kq\theta\} = k\varepsilon_1$, kde k je maximální takové, aby $k\varepsilon_1 < 1$. Konečná posloupnost zbytků $\varepsilon_1, 2\varepsilon_1, \dots, k\varepsilon_1$ dělí interval $(0, 1)$ na podinterválky délky ε_1 a číslo a do některého musí spadnout. Za vhodné n pak stačí vzít takové, aby $n\varepsilon_1$ byl hraniční bod interválu, do něhož číslo a spadne. Potom je zřejmě $|\{nq\theta\} - a| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$.

2. $q\theta - p = -\varepsilon_1$. Postup je podobný, jenom s přihlédnutím k tomu, že $q\theta - p = -\varepsilon_1$, a proto je $\{q\theta\} = 1 - \varepsilon_1$, $\{2q\theta\} = 1 - 2\varepsilon_1$ dtto. Tak se opět interval $(0, 1)$ rozseká na malé kousky atd.

Pomocný příklad. a) Necht' $\theta \in \mathbb{R}$ a $t \in \mathbb{N}$. Potom existují celá čísla p_t, q_t tak, že $|q_t\theta - p_t| < \frac{1}{t}$. Přitom $0 < q \leq t$. Dokažte.

b) Jestliže θ je iracionální, je $\lim_{t \rightarrow \infty} q_t = +\infty$.

Návod: a) Ke každému číslu $k = 0, 1, \dots, t$ najdeme celé číslo r_k tak, že $0 \leq k\theta - r_k < 1$ (tzn. $r_k = [k\theta]$, kde $[\cdot]$ značí celou část čísla uvnitř). Interval $[0, 1]$ rozdělíme na t intervalů

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{t}\right), I_2 = \left[\frac{1}{t}, \frac{2}{t}\right), \dots, I_t = \left[\frac{t-1}{t}, \frac{t}{t}\right).$$

Položme $x_k = k\theta - r_k$ pro $k = 0, 1, \dots, t$. Všech čísel x_k je celkem $t+1$, a proto v některém z intervalů výše leží alespoň dvě z nich, označme je x_{k_1}, x_{k_2} , kde $k_1 < k_2$. Odtud plyne, že číslo $|x_{k_2} - x_{k_1}|$ leží v intervalu $[0, \frac{1}{t})$. Proto

$$0 \leq |x_{k_2} - x_{k_1}| = |(k_2 - k_1)\theta - (r_{k_2} - r_{k_1})| < \frac{1}{t}$$

a stačí položit $q = k_2 - k_1$ a $p = r_{k_2} - r_{k_1}$. Zbývá ukázat, že $0 < q \leq t$. Ale to je zřejmé, protože $k_2 > k_1$ a zároveň obě k nabývají hodnot menších než t .

b) Čísla q_t jsou přirozená. Pokud by posloupnost nekonvergovala do nekonečna, muselo by existovat nekonečně mnoho přirozených čísel $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$, kterým by příslušelo totéž q a tím pádem nutně také totéž p . Pak by bylo

$$|q\theta - p| < \frac{1}{t_n} \implies 0 \leq |q\theta - p| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} = 0 \implies q\theta - p = 0 \implies \theta = \frac{p}{q},$$

což je spor s iracionalitou čísla θ .

2 Rekurentně zadaná posloupnost

Příklady

1. Spočítejte limitu rekurentně zadané posloupnosti

(a) $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{4}$

Řešení:

Příklad i s řešením máme odtud: <https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF>

- Za předpokladu, že posloupnost má limitu, můžeme psát

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3}{4} \stackrel{AL}{=} \frac{L + 3}{4}$$

Odtud $L = 1$.

2 REKURENTNĚ ZADANÁ POSLOUPNOST

- Posloupnost je omezená: Posloupnost je zřejmě kladná.
Dále předpokládejme, že $a_n \leq 1$. Pak

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{4} \leq \frac{1 + 3}{4} = 1.$$

Z indukce pak plyne, že $0 \leq a_n \leq 1$.

- Posloupnost je neklesající:

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \\ a_n &\leq \frac{a_n + 3}{4} \\ 4a_n &\leq a_n + 3 \\ 3a_n &\leq 3 \\ a_n &\leq 1, \end{aligned}$$

což je pravda z předchozího kroku.

(b) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Řešení: Pro n -tý člen máme vzorec

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}.$$

Posloupnost a_n je zřejmě ostře rostoucí, neboť nerovnost $a_{n+1} > a_n$ se lehce ověří (např. umocněním). Dokážeme, že $a_n \leq 2$ pro libovolné n ; umocňováním na druhou totiž postupně dostáváme

$$\begin{aligned} a_n \leq 2 &\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 2. \end{aligned}$$

Protože posloupnost je monotónní a omezená, konverguje, tj. má vlastní limitu L . Tuto limitu lze nyní navíc snadno spočítat, neboť

$$\begin{aligned} \lim a_{n+1} &= \lim \sqrt{2 + a_n} \\ L &= \sqrt{2 + L} \\ L &= 2. \end{aligned}$$

(c) $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$, kde $c \geq 0$.

Řešení:

Příklad i s řešením máme odtud: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>

Pro $c = 0$ je posloupnost konstantě nulová a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Nechť $c > 0$. Zřejmě platí, že $a_n > 0$ pro $n \in \mathbb{N}$.

- Za předpokladu, že posloupnost má limitu, můžeme psát (věta o odmocnině)

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{c + a_n} = \sqrt{c + L}$$

Získáváme kvadratickou rovnici

$$L^2 - L - c = 0.$$

Tedy

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

Ale protože posloupnost je kladná, nemůže mít zápornou limitu $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$.

Tedy $L = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$.

- Posloupnost je rostoucí: Indukcí.

Zřejmě platí $a_1 < 1_2$. Pak

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + c} < \sqrt{a_n + c} = a_{n+1}.$$

Z indukce je tedy posloupnost $\{a_n\}$ rostoucí.

- Posloupnost je shora omezená: Zřejmě $a_1 < \sqrt{c} + 1$. Ukážeme indukci, že jestliže $a_n < \sqrt{c} + 1$, pak i $a_{n+1} < \sqrt{c} + 1$.

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} < \sqrt{\sqrt{c} + 1 + c} < \sqrt{2\sqrt{c} + 1 + c} = \sqrt{(\sqrt{c} + 1)^2} = \sqrt{c} + 1.$$

(d) $a_1 = 10, a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$

Řešení:

Příklad i s řešením máme odtud: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>

- Za předpokladu, že posloupnost má limitu, můžeme psát

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 - \frac{5}{a_n} \stackrel{AL}{=} 6 - \frac{5}{L}$$

Získáváme kvadratickou rovnici

$$L^2 - 6L + 5 = 0.$$

Tedy

$$L_1 = 1, \quad L_2 = 5.$$

- Posloupnost je zdola omezená:

Zřejmě $a_1 > 5$. Ukážeme indukci, že jestliže $a_n > 5$, pak i $a_{n+1} > 5$.

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} > 6 - \frac{5}{5} = 5.$$

- Posloupnost je klesající:

$$\begin{aligned} a_n &> a_{n+1} \\ a_n &> 6 - \frac{5}{a_n} \\ \frac{a_n^2 - 6a_n + 5}{a_n} &> 0 \\ \frac{(a_n - 5)(a_n - 1)}{a_n} &> 0 \end{aligned}$$

Poslední řádek, je ale pravdivý, protože už máme $a_n > 5$.

Závěr: $L = 5$.

- (e) $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$. Dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Řešení: Ukážeme, že posloupnost je omezená a monotónní, tedy konvergentní. Označíme-li potom její limitu L , potom musí platit

$$\begin{aligned} \lim x_{n+1} &= \lim \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \\ L &= \lim \frac{1}{2} \left(L + \frac{1}{L} \right) \end{aligned}$$

odkud plyne, že

$$L = \lim \frac{1}{2} \left(L + \frac{1}{L} \right) \Leftrightarrow L = \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 1.$$

Zřejmě tedy limitou, pokud je posloupnost konvergentní, může být pouze číslo -1 nebo $+1$. Protože $x_0 > 0$, jsou všechny členy posloupnosti nezáporné (díky rekurentnímu vzorci), a tedy -1 nemůže být limitou, zbývá 1 .

Zbývá dokázat konvergenci, tj. monotonii a omezenost. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (AG-nerovnost) vyplývá, že pro libovolné $a > 0$ je

$$\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1,$$

a tedy platí, že libovolný člen posloupnosti s výjimkou x_0 je větší než 1 .

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) - x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - x_n^2}{x_n} \right) \leq 0.$$

Odtud plyne, že posloupnost je klesající (přičemž ostře, pokud $0 < x_0 \neq 1$, neboť v AG-nerovnosti nastává rovnost pouze tehdy, dělá-li se průměr stejných čísel). Z toho, že posloupnost je od druhého členu klesající plyne, že je omezená, neboť platí, že

$$0 < x_n \leq \max\{x_0, x_1\}.$$

- (f) Nechť $0 \leq a \leq 1$. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(a - a_n^2)$.

Řešení: Pokud $a = 0$, pak je posloupnost identicky nulová a limita je rovna 0 .

Nechť tedy $a \neq 0$ a nechť $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Tato nerovnost jistě platí pro x_1 . Pak $x_n = \sqrt{a} - \varepsilon$, kde $\varepsilon \leq \sqrt{a}$ a protože platí, že $\sqrt{a} \leq 1$, je také $\varepsilon \geq \sqrt{a}\varepsilon$, a proto

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(a - (\sqrt{a} - \varepsilon)^2) = \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2) \\ &= \sqrt{a} + (\sqrt{a}\varepsilon - \varepsilon) - \varepsilon^2 \leq \sqrt{a} - \varepsilon^2 < \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Přitom máme $x_{n+1} \geq 0$, protože pro $x_n < \sqrt{a}$ je přírůstek $\frac{1}{2}(a - x_n^2)$ kladné číslo. Indukcí jsme tak dokázali, že pokud $x_n < \sqrt{a}$, potom také $x_{n+1} < \sqrt{a}$.

Tím jsme indukci dokázali, že posloupnost je omezená a že pro každé n přirozené platí, že $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Z toho plyne, že posloupnost x_n je rostoucí, protože

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(a - x_n^2) > 0.$$

Z toho plyne, že posloupnost je konvergentní a existuje vlastní limita $\lim x_n = L$. Z toho plyne, že musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim(x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2)) \Leftrightarrow L = L + \frac{1}{2}(a - L^2) \Leftrightarrow L^2 = a \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{a}.$$

Protože ale všechny členy posloupnosti jsou kladné, připadá v úvahu pouze $L = \sqrt{a}$. Snadno se ověří, že výsledek platí i pro speciální případ $a = 0$.

(g) $a_1 = a, a_2 = b, a < b. a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$.

Řešení:

Příklad i s řešením máme odtud: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>

i. Indukcí ukážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$a_{2n-1} < a_{2n+1} < a_{2n+2} < a_{2n}$$

- Odhad pro $n = 1$: Protože $a_1 < a_2$, tak platí i

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} < \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2.$$

Dále

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} > \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1.$$

Pak

$$a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2} < \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2.$$

a

$$a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2} < \frac{a_3 + a_3}{2} = a_3.$$

Tedy

$$a_1 < a_3 < a_2$$

- Předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{2n-1} < a_{2n+1} < a_{2n+2} < a_{2n}.$$

- Ukážeme pro $n + 1$.

Z indukčního předpokladu máme

$$a_{2n+1} < \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{2} = a_{2n+3}$$

Odtud

$$a_{2n+3} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{2} < \frac{a_{2n+2} + a_{2n+3}}{2} = a_{2n+4}$$

Opět z indukčního předpokladu máme

$$a_{2n+3} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{2} < a_{2n+2}$$

Tedy

$$a_{2n+4} = \frac{a_{2n+3} + a_{2n+2}}{2} < a_{2n+2}$$

Dohromady

$$a_{2n+1} < a_{2n+3} < a_{2n+4} < a_{2n+2},$$

což jsme chtěli.

- ii. Z nerovností výše máme, že posloupnost $\{a_{2n}\}$ je klesající a posloupnost $\{a_{2n-1}\}$ je rostoucí. Navíc platí $a_1 \leq a_n \leq a_2$, tedy obě posloupnosti jsou omezené. Tedy existují vlastní limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = B,$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$.

Aplikujeme-li větu o limitě vybrané posloupnosti na výraz

$$a_{2n+1} = \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2},$$

dostaneme

$$B = \frac{B + A}{2}.$$

Tedy

$$A = B.$$

Protože obě podposloupnosti mají stejnou limitu, máme i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

- iii. Zbývá limitu vyčíslit. Ze zadání máme

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

$$a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_{n+1}$$

Dosadíme hodnoty pro $2, 3, \dots, n$:

$$a_3 - a_2 = a_1 - a_3$$

$$a_4 - a_3 = a_2 - a_4$$

$$\vdots$$

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-2} - a_n$$

$$a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_{n+1}$$

Sečteme rovnosti a získáme

$$a_{n+1} - a_2 = a_1 + a_2 - a_n - a_{n+1}$$

Po zlimitění

$$A - a_2 = a_1 + a_2 - A - A$$

Dohromady

$$A = \frac{a_1 + 2a_2}{3}$$

2. Určete limity z definice:

(a) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Řešení:

Příklad i s řešením máme odtud: <https://kag.upol.cz/mat1/texty/ch06/kapitola6.pdf>

Položme $A = 1$. Mějme libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme takové n_0 , že pro každé $n \geq n_0$ je

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Máme

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$$

Počítejme

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< n+1 \\ \frac{1}{\varepsilon} - 1 &< n \end{aligned}$$

Pak stačí položit $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \rceil$.

(b) $a_n = \frac{1}{2^n}$

Řešení:

Příklad i s řešením máme odtud: <https://kag.upol.cz/mat1/texty/ch06/kapitola6.pdf>

Položme $A = 0$. Mějme libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme takové n_0 , že pro každé $n \geq n_0$ je

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Počítejme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< 2^n \\ \log_2 \frac{1}{\varepsilon} &< n \end{aligned}$$

Pak stačí položit $n_0 = \lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil$.

(c) $a_n = n^2$

Řešení: Položme $A = \infty$. Mějme libovolné $K > 0$. Hledáme takové n_0 , že pro každé $n \geq n_0$ je

$$n^2 \geq K.$$

Počítejme

$$n^2 \geq K$$

$$n \geq \sqrt{K}.$$

Pak stačí položit $n_0 = \lceil \sqrt{K} \rceil$.