



7. cvičení – Limsup, liminf

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte supremum, infimum, minimum a maximum následujících množin v $\mathbb{R}$:

Řešení:

	inf	min	max	sup
$\mathbb{N}$	1	1	$\bar{\mathcal{A}}$	∞
$(0; 2]$	0	$\bar{\mathcal{A}}$	2	2
$(0; 1) \cap \mathbb{Q}$	0	$\bar{\mathcal{A}}$	$\bar{\mathcal{A}}$	1
$\{x \in \mathbb{Z}; x \geq -\sqrt{6}\}$	-2	-2	$\bar{\mathcal{A}}$	∞
$\{(-1)^n \sqrt{n}; n \in \mathbb{N}\}$	$-\infty$	$\bar{\mathcal{A}}$	$\bar{\mathcal{A}}$	∞
$\{\arctan x; x \in \mathbb{R}\}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\bar{\mathcal{A}}$	$\bar{\mathcal{A}}$	$\frac{\pi}{2}$
$\{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$	0	0	$\bar{\mathcal{A}}$	1
$\{\frac{1+(-1)^n}{2}; n \in \mathbb{N}\}$	0	0	1	1
$\{\cos \frac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{N}\}$	-1	-1	1	1
$\{(-1)^n n; n \in \mathbb{N}\}$	$-\infty$	$\bar{\mathcal{A}}$	$\bar{\mathcal{A}}$	∞

2. Uveďte příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum. Uveďte příklad množiny, která má infimum, ale nemá minimum.

Řešení: Např. $(0, 1) \subset \mathbb{R}$.

3. Necht' $A, B \subset \mathbb{R}$. Co lze říci o supremu a infimu následujících množin ve vztahu k $\sup A$, $\sup B$ a $\inf A$, $\inf B$?

Řešení: Označme $\inf A = i_A$, $\inf B = i_B$, $\sup A = s_A$, $\sup B = s_B$.

(a)

$$\inf(A \cup B) = \min\{i_A, i_B\}$$

$$\sup(A \cup B) = \max\{s_A, s_B\}$$

(b)

$$\inf(A \cap B) \geq \max\{i_A, i_B\}$$

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{s_A, s_B\}$$

(c)

$$\inf(A \setminus B) \geq i_A$$

$$\sup(A \setminus B) \leq s_A$$

(d)

$$\inf(A \triangle B) \geq \min\{i_A, i_B\}$$

$$\sup(A \triangle B) \leq \max\{s_A, s_B\}$$

(e)

$$\inf(-A) = -s_A$$

$$\sup(-A) = -i_A$$

(f)

$$\inf(A + B) = i_A + i_B$$

$$\sup(A + B) = s_A + s_B$$

(g)

$$\inf(A - B) = i_A - s_B$$

$$\sup(A - B) = s_A - i_B$$

(h)

$$\inf(A \cdot B) = \min\{s_A s_B, s_A i_B, i_A s_B, i_A i_B\}$$

$$\sup(A \cdot B) = \max\{s_A s_B, s_A i_B, i_A s_B, i_A i_B\}$$

4. Spočítejte limitu, neexistuje-li, najděte limes superior a inferior a hromadné body

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right)$

Řešení: Posloupnost postupně nabývá hodnot

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$$

Hromadné body:

$$\left\{0, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$\limsup a_n = 1, \liminf a_n = -1$$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$

Řešení: Pro $n = 2k - 1$, $k = 1, 2, \dots$, (tedy pro lichá n) máme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 3 - \frac{3}{2k - 1} - 2 = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 - \frac{3}{2k - 1} = 1.$$

Pro $n = 2k$, $k = 1, 2, \dots$, (tedy pro sudá n) máme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 3 - \frac{3}{2k} + 2 = \lim_{k \rightarrow \infty} 5 - \frac{3}{2k} = 5.$$

Hromadné body jsou $\{1, 5\}$, $\limsup a_n = 5$, $\liminf a_n = 1$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + n \sin 2n}{n \cos 3n + (2n + \sin 4n)^2}$

Řešení:

Vytkneme nejrychlejší člen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + n \sin 2n}{n \cos 3n + (2n + \sin 4n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{\sin 2n}{n}}{\frac{\cos 3n}{n} + 4 + \frac{4 \sin 4n}{n} + \frac{\sin^2 4n}{n^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Protože limita existuje, tak hromadným bodem je jen $\frac{1}{2}$ a $\limsup a_n = \liminf a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n} \right)$$

Řešení: Posloupnost není konvergentní. Má jen dva hromadné body, a to limity vybraných podposloupností $x_{2n} = -(2 + \frac{3}{2n})$ a $x_{2n+1} = (2 + \frac{3}{2n+1})$. Proto

$$\limsup x_n = 2, \quad \liminf x_n = -2.$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

Řešení: Posloupnost má jen dva hromadné body, a to limity vybraných podposloupností $x_{2n} = \frac{1}{n} + 1$ a $x_{2n+1} = \frac{1}{n}$. Proto

$$\limsup x_n = 1, \quad \liminf x_n = 0.$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$$

Řešení: Uvažujme nejprve posloupnost $b_n = \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$. Protože $\cos \frac{n\pi}{2}$ nabývá popořadě hodnot $0, -1, 0, 1$, jsou nenulové pouze sudé členy posloupnosti. Ty jsou rovny

$$x_{4n+2} = -\frac{4n+2}{4n+3} \rightarrow -1, \quad x_{4n} = \frac{4n}{4n+1} \rightarrow 1.$$

Liché členy posloupnosti jsou nulové.

Hromadné body posloupnosti jsou tedy $\{-1, 0, 1\}$ a

$$\limsup b_n = 1, \quad \liminf b_n = -1.$$

Pro posloupnost $a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$ pak máme hromadné body $\{0, 1, 2\}$ a

$$\limsup b_n = 2, \quad \liminf b_n = 0.$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Řešení: Člen $n(n-1)/2$ je sudý pro $n = 4k$ a $n = 4k+1$, naopak pro $n = 4k+2$ a $n = 4k+3$ je lichý. Posloupnost x_n tedy tvoří čtyři konstantní podposloupnosti:

$$x_{4n} = 1-2+3 = 2, \quad x_{4n+1} = 1+2+3 = 6, \quad x_{4n+2} = 1-2-3 = -4, \quad x_{4n+3} = 1+2-3 = 0.$$

Z toho plyne, že $\limsup x_n = 6$ a $\liminf x_n = -4$. Hromadné body jsou $\{-4, 0, 2, 6\}$.

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \pi n)n$$

Řešení: Podposloupnosti $x_{2n} = 2n$ a $x_{2n+1} = -2n-1$ rostou do $+\infty$, resp. klesají do $-\infty$. Tedy

$$\limsup x_n = \sup x_n = +\infty, \quad \liminf x_n = \inf x_n = -\infty.$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} -n[2 + (-1)^n]$$

Řešení: Posloupnost je konvergentní, protože $-n[2 + (-1)^n] \leq -n \rightarrow -\infty$. Proto

$$\limsup x_n = \liminf x_n = \inf x_n = -\infty.$$

$$(j) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$$

Řešení: Pro $n = 2k - 1$, $k = 1, 2, \dots$, (tedy pro lichá n) máme

$$\lim_{k=1} \frac{-2(2k-1)}{2k+1+1} + \sqrt[2k+1]{2} = -2 + 1 = -1$$

Pro $n = 2k$, $k = 1, 2, \dots$, (tedy pro sudá n) máme

$$\lim_{k=1} \frac{2(2k)}{2k+1} + \sqrt[2k]{2} = 2 + 1 = 3$$

Tedy $\limsup a_n = 3$, $\liminf a_n = -1$, hromadné body: $\{-1, 3\}$.

5. (a) Nechť M je konečná množina přirozených čísel. Najděte posloupnost a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna M .

Řešení: Nechť M je tvaru $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$. Hledaná posloupnost je pak tvaru $a_1 = m_1, a_2 = m_2, \dots, a_k = m_k, a_{k+1} = m_1, a_{k+2} = m_2, \dots$ (cyklus přes M).

- (b) Najděte posl. a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna $\mathbb{N} \cup \infty$.

Řešení: Např. posloupnost $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

- (c) Ukažte, že nelze najít takovou posloupnost, aby množina jejích hromadných bodů byla rovna $\mathbb{N}$.

Řešení: Myšlenka:

Nechť $\{a_n\}$ je taková posloupnost, že množina jejích hromadných bodů je rovna $\mathbb{N}$. Pak lze vybrat podposloupnosti takové, že

$$a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, \dots \rightarrow 1$$

$$a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, \dots \rightarrow 2$$

$$a_1^3, a_2^3, a_3^3, a_4^3, \dots \rightarrow 3$$

$$a_1^4, a_2^4, a_3^4, a_4^4, \dots \rightarrow 4$$

Navíc můžeme předpokládat, že $a_1^1 \geq 1 - \frac{1}{2}, a_2^2 \geq 2 - \frac{1}{2}, \dots, a_n^n \geq n - \frac{1}{2}$.

Vybereme diagonálně prvky $a_1^1, a_2^2, a_3^3, a_4^4, \dots$. Ty vytvoří posloupnost jdoucí do ∞ , což je spor.

6. (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$$

Řešení:

Použijeme větu o součinu omezené a mizející posloupnosti, $1 \geq \sin n \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$, tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

- (b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

Řešení:

Odhadneme

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \leq \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \leq \sqrt[n]{2\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}$$

Navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1 \cdot (1 + 0)$$

Ze dvou policajtů tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = 1$$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$

Řešení: Prve spočteme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{1 + \frac{(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}}}{n^3}} \stackrel{VOAL}{=} 0 \cdot \frac{1}{1 + 0} = 0.$$

Z věty o omezené a nulové posloupnosti pak máme i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = 0$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n + 1}{n^\alpha}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$

Řešení:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n + 1}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^\alpha} \frac{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha > 3 \\ \infty, & \alpha < 3 \end{cases}$$

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (3n+2)^4}{n^\alpha + n^4}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$

Řešení:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (3n+2)^4}{n^\alpha + n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \frac{(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})^2 + (3 + \frac{2}{n})^4}{n^\alpha + n^4} = \begin{cases} 81/2, & \alpha = 4 \\ 0, & \alpha > 4 \\ 81, & \alpha < 4 \end{cases}$$

(f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^4 - (n^2+1)^2}{n^\alpha + n^2}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$ **Řešení:**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^4 - (n^2+1)^2}{n^\alpha + n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^4 - 2 \cdot 4n^3 + \dots + 2^4)^4 - (n^4 + 2n^2 + 1)}{n^\alpha + n^2} \\ &= \begin{cases} -8, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha > 3 \\ -\infty, & \alpha < 3 \end{cases} \end{aligned}$$

(g)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1} \right),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$

Řešení: Odstraněním odmocniny z čitatele pomocí vhodného rozšíření (viz jmenovatel následujícího zlomku) máme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \frac{(n^2+1) - (n^2-1)}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{(n^2-1)^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^\alpha}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{(n^2-1)^2}} \end{aligned}$$

a vytknutím $n^{4/3}$ ze jmenovatele dostaneme

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha-4/3} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}$$

a) Pro $\alpha = 4/3$ vyjde

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

b) Pro $\alpha > 4/3$ vyjde

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha-4/3} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}} \\ = (+\infty) \cdot \frac{2}{3} = +\infty \end{aligned}$$

c) Pro $\alpha < 4/3$ vyjde

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha-4/3} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}} \\ = 0 \cdot \frac{2}{3} = 0. \end{aligned}$$

(h) Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - n} - an - b) = 0$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - n} - an - b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n - (an + b)^3}{(n^3 - n)^{2/3} + (n^3 - n)^{1/3}(an + b) + (an + b)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n - (a^3 n^3 + 3a^2 n^2 b + 3anb^2 + b^3)}{(n^3 - n)^{2/3} + (n^3 - n)^{1/3}(an + b) + (an + b)^2} \end{aligned}$$

Vedoucí člen ve jmenovateli je n^2 , v čitateli $n^3(1 - a^3)$. Aby byla limita vlastní, musí být $a = 1$. Pak v čitateli zbývá $3a^2 n^2 b$, které se také musí vynulovat, jinak by limita byla > 0 . Tedy $b = 0$.

(i) Určete $\alpha > 0$ tak, aby následující limita byla vlastní

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2 + 1} - n)}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2 + 1} - n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2 + 1} - n)} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3\alpha} \frac{(1 + \frac{1}{n^\alpha})^3 + \frac{\alpha(-1)^n}{n^{3\alpha}}}{n^2} \cdot n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3\alpha-1} \left[\left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right)^3 + \frac{\alpha(-1)^n}{n^{3\alpha}} \right] \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \right) \\ &= \begin{cases} 2, & \alpha = 1/3 \\ \infty, & \alpha > 1/3 \\ 0, & \alpha < 1/3 \end{cases} \end{aligned}$$

(j)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n) \cdot \frac{\sqrt{4n^2 - n} + 2n}{\sqrt{4n^2 - n} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{\sqrt{4n^2 - n} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \frac{-1}{\sqrt{4 - \frac{1}{n}} + 2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

(k)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$$

Řešení:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + 1}{(n+2) - 1} = 1.$$

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sin n\pi)$$

Řešení: Máme $\sin(n\pi) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sin n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 0 = 1.$$