7. cvičení – Limsup, liminf

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je shora omezená. Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazýváme *supremem* M, pokud

1. $\forall x \in M : x \leq s$;
2. $\forall y \in \mathbb{R}, y < s, \ \exists x \in M : y < x$.

Je-li $M \neq \emptyset$ shora neomezená, tak definujeme $\sup M = \infty$. Analogicky definujeme infimum. Pro $M = \emptyset$ definujeme $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = \infty$.

Definice 2. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora omezená} \\ \infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora neomezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme *limes superior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Obdobně definujeme *limes inferior*.

Definice 3. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $A \in \mathbb{R}^*$ nazveme *hromadnou hodnotou* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 4 (O vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$, $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ a $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$ (maximum a minimum se uvažuje v $\mathbb{R}^*$).

Věta 5 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Příklady

1. Najděte supremum, infimum, minimum a maximum následujících množin v $\mathbb{R}$:

   (a) $\mathbb{N}$
   (b) $(0; 2]$
   (c) $(0; 1) \cap \mathbb{Q}$
   (d) $\left\{x \in \mathbb{Z}; x \geq -\sqrt{6}\right\}$
   (e) $\left\{(-1)^n \sqrt{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$
   (f) $\{\arctan x; x \in \mathbb{R}\}$
   (g) $\left\{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$
   (h) $\left\{\frac{1 + (-1)^n}{2}; n \in \mathbb{N}\right\}$
   (i) $\left\{\cos \frac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{N}\right\}$
   (j) $\{(-1)^n n; n \in \mathbb{N}\}$

2. Uveďte příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum. Uveďte příklad množiny, která má infimum, ale nemá minimum.

3. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$. Co lze říci o supremu a infimu následujících množin ve vztahu k $\sup A$, $\sup B$ a $\inf A$, $\inf B$?

   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $A \setminus B$
   (d) $A \triangle B$

(e) $-A = \{-a, a \in A\}$

(f) $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$

(g) $A - B = \{a - b, a \in A, b \in B\}$

(h) $A \cdot B = \{a \cdot b, a \in A, b \in B\}$

4. Spočtěte limitu, neexistuje-li, najděte limes superior a inferior a hromadné body

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + 2n + n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n + \sin 4n)^2}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$

(g)♡ $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos \pi n) n$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} -n(2 + (-1)^n)$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$

Bonus

5. (a) Nechť M je konečná množina přirozených čísel. Najděte posloupnost a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna M.

(b) Najděte posl. a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna $\mathbb{N} \cup \infty$.

(c)❀ Ukažte, že nelze najít takovou posloupnost, aby množina jejích hromadných bodů byla rovna $\mathbb{N}$.

Opakování

6. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$

(d)❄ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + n + 1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2 + (3n+2)^4}{n^\alpha + n^4}$, $\alpha \in \mathbb{N}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-2)^4 - (n^2+1)^2}{n^\alpha + n^2}$, $\alpha \in \mathbb{N}$

(g) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(h)❀ Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3 - n} - an - b) = 0$

(i) Určete $\alpha > 0$ tak, aby násl. limita byla vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1} - n)}$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n)$

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \sin n\pi)$

(4g) Rozepište pár členů $\frac{n(n-1)}{2}$.
(5c) Cantorova diagonální metoda.
(6d) Uvažujte $\alpha > 3$, $\alpha < 3$, $\alpha = 3$.
(6h) $\sqrt[3]{n^3 - n} - an - b = \sqrt[3]{n^3 - n} - \sqrt[3]{(an+b)^3}$