6. cvičení – n-tá odmocnina, éčko

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1. Určete limity

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+2^n+3^n}$

   Řešení: Použijeme větičku a budeme zjišťovat $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+2^{n+1}+3^{n+1}}{n^2+2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} + (\frac{2}{3})^{n+1} + 1}{\frac{n^2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n + \frac{1}{3}} = \frac{0+0+1}{0+\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}} = 3$$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^n+3^n\sin(2^n)}{5^n+4^n\cos(n!)}}$

   Řešení:
   Najdeme odhady pro dva policajty.

$$\frac{4^n}{4} \le 4^n - 3^n \le 4^n + 3^n \sin(2^n) \le 4^n + 4^n = 2\cdot 4^n$$

   Pak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{4}} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n+3^n\sin(2^n)} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot 4^n}.$$

   Protože máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{4}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4}} = 4$$

   a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot 4^n}. \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n} = 4,$$

   tak dohromady

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n+3^n\sin(2^n)} = 4.$$

   Jmenovatel odhadneme analogicky

$$\frac{5^n}{5} \le 5^n - 4^n \le 5^n + 4^n\cos(n!) \le 2\cdot 5^n.$$

   Pak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{5}} = 5$$

   a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot 5^n} = 5.$$

   Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+4^n\cos(n!)} = 5.$$

   Pro původní limitu pak máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n+3^n\sin(2^n)}{5^n+4^n\cos(n!)}} \overset{VOAL}{=} \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n+3^n\sin(2^n)}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+4^n\cos(n!)}} = \frac{4}{5}.$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$ pro $a,b,c>0$

Řešení: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \geq b \geq c$. Potom platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} = \lim_{n\to+\infty} a \cdot \sqrt[n]{1+(b/a)^n+(c/a)^n} = a$$

podle věty o dvou policajtech, neboť $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1+(b/a)^n+(c/a)^n} \leq \sqrt[n]{3}$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}}}\right)$ pro $a>b>0$

Řešení: Vytkněme a^n v čitateli a a^{2n} ve jmenovateli. Je $\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{a^2}\left(\frac{\sqrt[n]{1+(b/a)^n}}{\sqrt[n]{1+(b/a)^{2n}}}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1}.$$

Máme totiž $0<b/a<1$, a tedy můžeme odhadnout

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1+(b/a)^n} \leq \sqrt[n]{2}.$$

Podle věty o dvou policajtech jde pak limita k jedné.
Jmenovatele vyřešíme analogicky.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{((n+2)^2-(n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}}$

Řešení: Upravíme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2-(n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n^2+4n+4-(n^2+2n+1))^{n+1}}{(n^3+3n^2+3n+1-n^3-3n^2)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+3)^{n+1}}{(3n+1)^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}n^{n+1}(1+\frac{3}{2n})^{n+1}}{3^{n-1}n^{n-1}(1+\frac{1}{3n})^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{n^{n-1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+\frac{3}{2n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{3n})^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6\cdot 2^n}{3^n}} \cdot \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+\frac{3}{2n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{3n})^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt[n]{n^2}\cdot\sqrt[n]{\left(1+\frac{3}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{3n}\right)}\cdot\frac{1+\frac{3}{2n}}{1+\frac{1}{3n}} = 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1+0}{1+0} = \frac{2}{3}.$$

Platí totiž pro každé $a>0$, k přirozené :

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1, \qquad \lim \sqrt[n]{n} = 1 \implies \lim \sqrt[n]{n^k} = 1$$

a také, že

$$1 \leq \sqrt[n]{\left(1+\frac{3}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leq \sqrt[n]{4}$$

a krajní limity jdou k jedné, tudíž podle věty o dvou policajtech také limita prostřední.

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n^2+n} - n\cdot\sqrt{4^n+1}}{\sqrt[n]{2^{n^2}+1}}$

Řešení: Upravíme odmocniny a vytkneme nejrychlejší člen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n^2+n} - n\cdot\sqrt{4^n+1}}{\sqrt[n]{2^{n^2}+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n^2+n) - n^2(4^n+1)}{\sqrt[n]{2^{n^2}+1}\cdot(2\sqrt{n^2+n}+n\cdot\sqrt{4^n+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n-4^n n^2 - n^2}{\sqrt[n]{2^{n^2}\left(1+\frac{1}{2^{n^2}}\right)}\cdot\left(2\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n\cdot\sqrt{4^n(1+\frac{1}{4^n})}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n n^2}{2^n\cdot n\cdot 4^{\frac{n}{2}}} \frac{4^{1-n}+\frac{4}{4^n n}-1-4^{-n}}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2^{n^2}}\right)}\cdot\left(\frac{2}{2^n}\sqrt{(1+\frac{1}{n})}+\sqrt{(1+\frac{1}{4^n})}\right)}$$

$$\overset{VOAL}{=} \infty\cdot\frac{0+0-1-0}{1(0+1)} = -\infty$$

Pro n-tou odmocninu máme 2 policajty

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2^{n^2}}\right)} \leq \sqrt[n]{2}$$

2. Spočtěte limity

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n} - \sqrt{3^n+2^n}}$

Řešení: Upravíme odmocniny dle vzorce

$$\sqrt{3^n+2\cdot 2^n} - \sqrt{3^n+2^n} = \frac{3^n+2\cdot 2^n - 3^n - 2^n}{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}} = \frac{2^n}{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}}$$

Odhadneme jmenovatele:

$$\sqrt{3^n} \leq \sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n} \leq 2\sqrt{3^n+2\cdot 2^n} \leq 2\sqrt{3^n+2\cdot 3^n} = 2\sqrt{3}\sqrt{3^n}$$

Pro limity dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n}} = \sqrt{3}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\sqrt{3}\sqrt{3^n}} = \sqrt{3}.$$

Ze dvou policajtů a aritmetiky limit máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}}}$

Řešení: Odhadneme

$$\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{2\cdot 3^n}$$

Ze dvou policajtů je
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3.$$
Pro jmenovatele
$$\sqrt[2n]{4^n} \le \sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}} \le \sqrt[2n]{2\cdot 4^n}.$$
Limity:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{4^n} = \lim_{n\to\infty} 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4},$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2\cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2}}\cdot 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}.$$
Dohromady
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}}} = \frac{3}{2}.$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}$

Řešení:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3}\cdot \frac{\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}{1+\frac{\sqrt[2n]{n}}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$
Na celkovou limitu použijeme větu o omezené a mizející posloupnosti, tedy
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}} = 0.$$

3. (a)
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = e^3$$

Řešení:
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^3 \\
&\overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\
&= e\cdot e\cdot e = e^3
\end{aligned}$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \sqrt{e}$$

Řešení:
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}$$

Z věty o limitě vybrané posloupnosti máme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=e$$

Pokud použijeme větičku o limitě a odmocnině, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}=\sqrt{e}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}\right)^{-1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}\right)^{-1}\\
&\overset{VOAL}{=}\frac{1}{e}
\end{aligned}$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n}=\frac{1}{e^2}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1-1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{n+1}{-2}\cdot(-2)}}{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}\\
&\overset{VOAL}{=}\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{n+1}{-2}}\right)^{-2}}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}=\frac{e^{-2}}{1}
\end{aligned}$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}=1$$

Řešení:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

Z Věty o limitě vybrané posloupnosti máme, že

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e,$$

tedy lze nalézt n_0 tak, že pro každé $n \geq n_0$ máme

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 10.$$

a

$$1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}.$$

Dohromady máme odhady:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{10} = 1,$$

tedy z Věty o dvou policajtech máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = 1.$$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

Řešení: Uvažujme tři případy.

i. Nechť $x > 0$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}\cdot x} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x$$

Využili jsme posloupnost $x_n = n/x$, pro niž platí $x_n \to \infty$.

ii. Nechť $x < 0$, pak $-x > 0$ a:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n+x}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{-x}{n+x}\right)^n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{n+x-x}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{n+x}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{-x}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{\frac{n+x}{-x}}\right)^{-x}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{-x}}\\
&= \frac{1}{e^{-x}}\cdot\frac{1}{1^{-x}} = e^x
\end{aligned}$$

Využili jsme posloupnost $x_n = \frac{n+x}{-x}$, pro niž platí $x_n \to \infty$.

iii. Nechť $x = 0$. Pak $a_n = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 = e^0$.

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+\sin n}\right)^n = e$

Řešení:

Použijeme dva policajty

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+\sin n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

Navíc platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1}$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = e$$

Ze dvou policajtů tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\sin n}\right)^n = e$$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n-2}\right)^{n+1} = e^6$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n-2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2+6}{n-2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{n-2+3}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{3}\cdot\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{n-2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{3}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{6}}\right)^{\frac{n-2}{6}\cdot 6} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{3}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{6}}\right)^{\frac{n-2}{6}}\right)^{6} \stackrel{VOAL}{=} 1\cdot e^{6}$$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n+1} = 1$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3+2}{n^2-3}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{\frac{n(n+1)}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{n^2-3+3+n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{3}}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{n}}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{n^2-3}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{3}}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{n}}\sqrt[n]{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{2}}$$
$$\stackrel{VOAL}{=} 1\cdot 1\cdot 1.$$

Na poslední limitu užijeme dva policajty, protože

$$\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{2} \to e^2,$$

budou tak od jistého n_0 platit odhady

$$1 \le \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{2} \le 10.$$

4. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Co můžeme říct o $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n a_n$?

   Řešení: Limita existuje, právě když $\lim a_n = 0$.
   Jestliže $\lim a_n = 0$, potom $\lim(-1)^n a_n = 0$ podle věty o limitě součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule.

Jestliže $\lim a_n = A \neq 0$, pak pro sudé členy máme limitu rovnu A, pro liché členy $-A$. Což je spor s jednoznačností limity a větou o limitě vybrané posloupnosti.

5. Existují posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n$ neexistuje?
   Řešení: Ano. Např. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n^2$. Pak $a_n b_n = (-1)^n n$.
6. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?
   Řešení: Ne. Např. posloupnost
$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 3,1 \\ a_3 &= 3,14 \\ a_4 &= 3,141 \\ a_5 &= 3,1415 \\ a_6 &= 3,14159 \\ a_7 &= 3,141592 \\ a_8 &= 3,1415926 \\ &\downarrow \\ &\pi \end{aligned}$$
7. Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost taková, že $a_{n+2} \geq a_n$. Musí mít a_n limitu?
   Řešení: Nikoli. Např. $(-1)^n \geq (-1)^{n+2}$.