6. cvičení – n-tá odmocnina, éčko

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (O dvou policajtech)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel, splňující

(i) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ a_n \leq c_n \leq\ b_n$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim b_n = A \in \mathbb{R}$.

Pak

$$\lim c_n = A.$$

Věta 2. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s **kladnými** členy. Nechť následující limita **existuje**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak také

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Opačná implikace neplatí.

Věta 3 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Fakta

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
2. $a > 1$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$
3. $\beta > 0$, $a > 1$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$
4. $\alpha > 0$, $\beta > 0$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log^\alpha n}{n^\beta} = 0.$

$$\log^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

Nechť $\alpha > 0$, pak:

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Fakta 2

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Nechť x_n je posloupnost, $x_n \to \infty$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Příklady

1. Určete limity

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+2^n+3^n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^n+3^n\sin(2^n)}{5^n+4^n\cos(n!)}}$

(c)❀ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$ pro $a,b,c>0$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}}}\right)$ pro $a>b>0$

(e)✿ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{((n+2)^2-(n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}}$

(f)✱ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\cdot}\sqrt{n^2+n}-n\cdot\sqrt{4^n+1}}{\sqrt[n]{2^{n^2}+1}}$

2. Spočtěte limity

(a)♡ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}-\sqrt{3^n+2^n}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}}}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n^2\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}$

3. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}$

(c)❀ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n}$

(e)❄ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$

(f)★ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}$, $x\in\mathbb{R}$

(g)❀ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n+\sin n}\right)^{n}$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+4}{n-2}\right)^{n+1}$

(i)♡ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n+1}$

Bonus

4. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Co můžeme říct o $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n a_n$?
5. Existují posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ neexistuje?
6. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?
7. Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost taková, že $a_{n+2} \geq a_n$. Musí mít a_n limitu?

(1c) BÚNO $a \geq b \geq c$.
(1e) Roznásobíme závorky pod odmocninou, pak vytkneme.
(1f) Odmocniny dle vzorce $A^2 - B^2$.
(2a) Odmocniny dle vzorce $A^2 - B^2$.

(3c) Spočtěte převrácenou hodnotu
(3e) Vede na 2 policajty
(3f) Uvažujte zvlášť $x > 0$, $x < 0$
(3g) Vede na 2 policajty, $-1 \leq \sin n \leq 1$
(3i) Vede na 2 policajty