



5. cvičení – Škála

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete limity

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!}$

Řešení: Vytkneme nejrychlejší člen, tedy $n!$, a použijeme škálu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^2}{n!}}{\frac{n^3}{n!} + 1} \stackrel{VOAL}{=} \frac{0 + 0}{0 + 1} = 0.$$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

Řešení: Vhodným vytknutím plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} + 1} \stackrel{AL}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{0 + 1}{0 + 1} = \frac{1}{3}.$$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n}$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5,0001} \right)^n + \left(\frac{2}{5,0001} \right)^n + \\ &+ \left(\frac{3}{5,0001} \right)^n + \left(\frac{4}{5,0001} \right)^n + \left(\frac{5}{5,0001} \right)^n \stackrel{VOAL}{=} 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}$

Řešení: Nejrychleji ze členů ve zlomku roste faktoriál. Proto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n(n!)} \cdot \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^5}{n!} + 1}{\frac{n^6}{n!} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^5}{n!} + 1}{\frac{n^6}{n!} + 1} \\ &\stackrel{VOAL}{=} 1 \cdot \frac{0 + 0 + 1}{0 + 1} = 1. \end{aligned}$$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n + n^3 + \frac{1}{n} + e^n + 5^n}{\log_{10} n + n^4 + 5^n + n^3 + 4^n}$

Řešení: Vytkneme nejrychlejší rostoucí člen 5^n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \frac{\log n}{5^n} + \frac{n^3}{5^n} + \frac{\frac{1}{n}}{5^n} + \frac{e^n}{5^n} + \frac{5^n}{5^n}}{5^n \frac{\log_{10} n}{5^n} + \frac{n^4}{5^n} + \frac{5^n}{5^n} + \frac{n^3}{5^n} + \frac{4^n}{5^n}} \stackrel{VOAL}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 + 0 + 0 + 0 + 1}{0 + 0 + 1 + 0 + 0} = 1$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$$

Řešení: Vytkneme $(n+1)!$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2) + 1}{n+2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+1} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{1+3/n}{1+1/n} &\stackrel{VOAL}{=} 1 \end{aligned}$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log(n^2))^2}{\sqrt{n+5\log^2 n} - \sqrt{n+2\log^2 n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Řešení: Rozšíříme odmocniny a pak použijeme škálu:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log(n^2))^2}{\sqrt{n+5\log^2 n} - \sqrt{n+2\log^2 n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log(n^2))^2 (\sqrt{n+5\log^2 n} + \sqrt{n+2\log^2 n})}{n+5\log^2 n - n-2\log^2 n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2\log n)^2}{3\log^2 n} \cdot \frac{\sqrt{n+5\log^2 n} + \sqrt{n+2\log^2 n}}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{5\log^2 n}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2\log^2 n}{n}} \right) \stackrel{VOAL}{=} \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

2. Jak to dopadne s posloupnostmi? (Divergentní znamená jak jdoucí do nekonečna, tak oscilující.)

(a) Necht posloupnost x_n je konvergentní a posloupnost y_n je divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) $x_n + y_n$, b) $x_n y_n$ jsou také divergentní?

Řešení: a) Ano, součet je divergentní. Lze ukázat sporem. Předpokládejme, že $(x_n + y_n)$ je konvergentní posloupnost. Pak ale $y_n = (x_n + y_n) - x_n$ je součtem dvou konvergentních posloupností (plyne z aritmetiky limit). Což je spor.

b) Nemusí být, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n$, pak $x_n y_n = 1$, což je konvergentní posloupnost.

(b) Necht posloupnosti x_n a y_n jsou divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) $x_n + y_n$, b) $x_n y_n$ jsou také divergentní?

Řešení: Nemusí být. Např. $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, pak $x_n + y_n = 0$ a $x_n y_n = -1$.

(c) Necht $\lim x_n = 0$ a y_n je libovolná posloupnost. Je možné říci, že $\lim(x_n y_n) = 0$?

Řešení: Nikoli, např. $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = n$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 1$.

(d) Necht $\lim(x_n y_n) = 0$. Je možné říci, že platí buď $\lim x_n = 0$ nebo $\lim y_n = 0$?

Řešení: Také ne. Necht x_n je posloupnost, která má na lichých pozicích 0 a na sudých 1. Naopak necht y_n má na sudých pozicích 0 a na lichých 1. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, ale ani jedna posloupnost nemá nulovou limitu.