

2. zápočtová písemka

1. Spočtete derivaci, případně jednostranné derivace funkce f všude, kde existují

$$f(x) = xe^{-|x-1|}$$

2. Spočtete limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arcsin x)^{\cot x}$$

3. Spočtete limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{\sin(x-3)} - 1}{e^{x^2-9} - 1}$$

4. Rozhodněte o platnosti následujících výroků

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = 0 \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = 0$$

2. zápočtová písemka

1. Spočtete derivaci, případně jednostranné derivace funkce f všude, kde existují

$$f(x) = |x + 4| \log(x^2 + 1)$$

2. Spočtete limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(3x^2))^{\frac{1}{x^2}}$$

3. Spočtete limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin x)}{e^{\tan x} - 1}$$

4. Nechť $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Rozhodněte o platnosti následujících výroků.

- (a) Jsou-li f, g spojité, potom též fg a $f(g)$ jsou spojité.
- (b) Je-li fg spojitá, pak alespoň jedna z funkcí f nebo g musí být spojitá.
- (c) Je-li $f(g)$ spojitá, pak alespoň jedna z funkcí f nebo g musí být spojitá.

$$(1) f = x e^{-|x-1|}$$

$$f = \begin{cases} x e^{-x+1} \\ 1 \\ x e^{x-1} \end{cases}$$

$$x \in (1, \infty)$$

$$x = 1$$

$$x \in (-\infty, 1)$$

$$f' = \begin{cases} e^{-x+1} + x e^{-x+1}(-1) & x \in (1, \infty) \\ e^{x-1} + x e^{x-1} & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

$$f \text{ stetig } \sim 1$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} e^{-x+1} + x e^{-x+1}(-1) = 1 + (-1)e^0 = 0$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} e^{x-1} + x e^{x-1} = 1 + 1e^0 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} f'_+(1) = 0 \\ f'_-(1) = 2 \end{array} \right\} f'(1) \text{ nicht existiert}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arcsin x)^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\cot x \log(1 + \arcsin x)} = e^1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \arcsin x)}{\arcsin x} \cdot \frac{\arcsin x}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \stackrel{AL}{=} 1$$

$$\underline{\text{Vorsatz 1}} \quad f(y) = \frac{\log(1+y)}{y} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

$$g(x) = \arcsin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = 0$$

$$(p) \arcsin x \neq 0 \quad \frac{1}{x} \text{ nicht } \frac{0}{0}$$

Vorsatz 2

$$f(y) = e^y$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} e^y = e^1 \quad (s) \quad e^y \text{ stetig } \sim 1$$

$$g(x) = \cot x \cdot \log(1 + \arcsin x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{\sin(x-3)} - 1}{e^{x^2-9} - 1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{\sin(x-3)} - 1}{\sin(x-3)} \cdot \frac{\sin(x-3)}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{e^{x^2-9} - 1} \cdot \frac{1}{x+3}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6}$$

KLSE 1 $f(y) = \frac{e^y - 1}{y}$ $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

$g(x) = \sin(x-3)$ $\lim_{x \rightarrow 3} \sin(x-3) = 0$ Spez

(D) $\sin(x-3) \neq 0$ na $P(3, \frac{5}{6})$



(D) $x^2-9 \neq 0$ na $P(3, 1)$

2 $g_2 = x^2-9$

$\lim_{x \rightarrow 3} x^2-9 = 0$

3 $f(y) = \frac{\sin y}{y}$

$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$



$g(x) = x-3$

$\lim_{x \rightarrow 3} x-3 = 0$

(D) $x-3 \neq 0$ na $P(3, 12)$



(4) (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

Neploš. Protipl'elad $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$

Paž $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2} = 0$ ale $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$ } $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \neq$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = 0$

Plati plyno e VOLSE

vstupi: $h(y) = \frac{f(y)}{y}$

vstupi: $g(x) = x^2$

$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

(D) $x^2 \neq 0$ na $P(0, 0)$



0 voline de Df.

$$(1) f = |x+4| \log(x^2+1)$$

$$b_f = \mathbb{R}$$

$$f = \begin{cases} (x+4) \log(x^2+1) \\ 0 \\ -(x+4) \log(x^2+1) \end{cases}$$

$$x \in (-4, \infty)$$

$$x = -4$$

$$x \in (-\infty, -4)$$

$$f' = \begin{cases} 1 \cdot \log(x^2+1) + (x+4) \cdot \frac{2x}{1+x^2} & x \in (-4, \infty) \\ -\log(x^2+1) + (x+4) \cdot \frac{-2x}{1+x^2} & x \in (-\infty, -4) \end{cases}$$

$$\text{as } x = -4 \quad \text{f spj } -4$$

$$f'_+(-4) = \lim_{x \rightarrow -4+} \log(1+x^2) + (x+4) \frac{2x}{1+x^2} = \log 17$$

$$f'_-(-4) = \lim_{x \rightarrow -4-} -\log(1+x^2) + (x+4) \frac{-2x}{1+x^2} = -\log 17$$

$$\} f'(-4) \neq$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(3x^2))^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \log(1 + \sin(3x^2))} = e^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin(3x^2))}{\sin(3x^2)} \cdot \frac{\sin(3x^2)}{3x^2} \cdot 3 \stackrel{4L}{=} 1 \cdot 1 \cdot 3$$

VOLSEF1

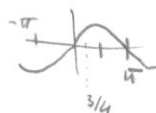
$$f(y) = \frac{\log(1+y)}{y}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

$$g(x) = \sin(3x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(3x^2) = 0 \quad \text{spj}$$

$$(P) \sin(3x^2) \neq 0 \text{ we } P(0, \frac{1}{2})$$



VOLSEF2

$$f(y) = \frac{\sin y}{y}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$g(x) = 3x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 0$$

$$(P) 3x^2 \neq 0 \text{ we } P(0, \frac{1}{2})$$



VOLSEF3

$$f(y) = e^y$$

$$\lim_{y \rightarrow 3} e^y = e^3$$

$$(S) e^y \text{ spj } \pi 3$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \log(1 + \sin 3x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin x)}{\sin x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\tan x}{e^{\tan x} - 1} \cdot \frac{x}{\tan x} \stackrel{AL}{=} 1$$

VolSE 1 $f(y) = \frac{\arctan y}{y}$ $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan y}{y} = 1$

$$g(x) = \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

(p) $\sin x \neq 0$ na $P(0, \frac{\pi}{4})$



VolSE 2 $f(y) = \frac{y}{e^y - 1}$ $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} \stackrel{AL}{=} 1$

$$g(x) = \tan x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0 \text{ spoj}$$

(p) $\tan x \neq 0$ na $P(0, \frac{\pi}{4})$



$$(4) f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(a) f, g spoj $\Rightarrow fg, f(g)$ spoj.

Platí, máme věty

(b) fg spoj $\Rightarrow f$ nebo g spoj.

Neplatí. Proti příklad

$f:$

$g:$

$$f \cdot g = 0$$

(c) $f(g)$ spoj $\Rightarrow f$ nebo g spoj.

Neplatí. Proti pří.

$$f = \text{squ } x$$

$$f(g) = 1$$

$g =$