1. písemka

Příklad 1 [6b]:
Spočtěte limitu posloupnosti nebo ukažte, že neexistuje:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n-3}-\sqrt{n^2+n+3}}{\sqrt{n^2-6}-\sqrt{n^2+6}}$$

Příklad 2 [6b]:
Spočtěte limitu posloupnosti nebo ukažte, že neexistuje:

$$\lim_{n\to\infty} \cos{(n\pi)} \frac{n!+e^n+(-1)^n}{n+n^2+2(n!)+e^{2n}}$$

Příklad 3 [6b]:
Spočtěte limitu posloupnosti nebo ukažte, že neexistuje:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{2n}-\sqrt{n}+1}$$

Teoretický příklad [3b]:
Určete jestli následující tvrzení platí nebo ne. Svou odpověd zdůvodněte.

1. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je shora omezená reálná posloupnost. Potom neplatí, že $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
2. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je reálná posloupnost pro kterou neplatí, že $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Potom $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je shora omezená.

① $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n-3} - \sqrt{n^2+n+3}}{\sqrt{n^2-6} - \sqrt{n^2+6}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n-3} + \sqrt{n^2+n+3}}{\sqrt{n^2+n-3} + \sqrt{n^2+n+3}} \cdot \frac{\sqrt{n^2-6} + \sqrt{n^2+6}}{\sqrt{n^2-6} + \sqrt{n^2+6}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-3-n^2-n-3}{n^2-6-n^2-6} \cdot \frac{\sqrt{n^2-6} + \sqrt{n^2+6}}{\sqrt{n^2+n-3} + \sqrt{n^2+n+3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-6}{-12} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{n^2}}}{\cancel{\sqrt{n^2}}} \frac{\sqrt{1-6/n^2} + \sqrt{1+6/n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n}}} \overset{AL}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-0} + \sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0-0} + \sqrt{1+0+0}} = \frac{1}{2}$$

V o $\sqrt{\ }$

② $$\lim_{n\to\infty} \overbrace{\cos(n\pi) \underbrace{\frac{n! + e^n + (-1)^n}{n+n^2+2(n!)+e^{2n}}}_{b_n}}^{a_n} \not\exists$$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

④
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{1 + \frac{e^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!} + \frac{n^2}{n!} + 2 + \frac{(e^2)^n}{n!}} \overset{AL}{=} \frac{1+0+0}{0+0+2+0} = \frac{1}{2}$$

$\frac{e^n}{n!}$: 0 stále; $\frac{(-1)^n}{n!} \to 0$ ou a mez

$\to 0$ stále; 0 stále

z lim vybr posl i $\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \frac{1}{2}$

a $\lim_{n\to\infty} b_{2n-1} = +1/2$

②
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} b_{2n} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n-1} b_{2n-1} = -1/2$$
$\Big\}$ $\lim_{n\to\infty} a_n \not\exists$ (spor s lim vybr posl a jednoznačností lim)

③ $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{2n} - \sqrt{n} + 1} = 4$$ ze ① 2 policajtů

$$\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}2^{2n}} \le \sqrt[n]{2^{2n}-\sqrt{n}} \le \sqrt[n]{2^{2n}-\sqrt{n}+1} \le \sqrt[n]{2^{2n}+1} \le \sqrt[n]{2^{2n}\cdot 2} = 4\cdot\sqrt[n]{2}$$

③

$4\cdot\sqrt[n]{2} \to 4$

$= \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}} \cdot 4 \to 1\cdot 4$

odj. ho

②

$$\frac{1}{2}2^{2n} \le 2^{2n} - \sqrt{n}$$
$$\sqrt{n} \le \frac{1}{2}2^{2n}$$
$$\frac{\sqrt{n}}{4^n} \le 1/2$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{4^n} = 0$ tedy $\exists n_0$ $\forall n \ge n_0$

$$\frac{\sqrt{n}}{4^n} \le 1/2$$

(4) (1) $\{a_n\}$ je shora om.

Pak není pravda, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Tvrzení <u>platí</u>.

Sporem: nechť $\lim a_n = \infty$ (a tedy $\exists$)

pak $\forall k > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq k$

což je spor s def. omezenosti:

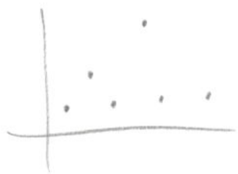
a_n je sh. om. jestliže $\exists M \in$ BÚNO $M > 0$: $a_n \leq M$

ale z def. limity lze najít n_0: $a_{n_0} \geq M+1$. Spor.

(2) není pravda, že $\lim a_n = \infty$. Pak a_n je shora om.

Protipříklad:

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ liché} \\ n & n \text{ sudé} \end{cases}$$



pak $\lim a_n \nexists$, ale $\{a_n\}$ je shora neom.

1. zápočtová písemka

1. (6 bodů) Spočtěte limitu posloupnosti, nebo ukažte, že neexistuje:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{3n} \cdot \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{5n-2}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{4n+1}}$$

2. (6 bodů) Spočtěte limitu posloupnosti, nebo ukažte, že neexistuje:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+(-1)^n+n}$$

3. (6 bodů) Spočtěte limitu posloupnosti, nebo ukažte, že neexistuje:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{5+\sqrt{n}+\cos(n\pi)}{\log n-\sqrt{2n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

4. (3 body) Rozhodněte, zda jsou pravdivá následující tvrzení.

   (a)
$$(\ \exists \lim_{n\to\infty} a_n b_n \in \mathbb{R},\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

   (b)
$$(\exists \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1,\quad \sup\{|a_n|; n\in\mathbb{N}\} < \infty) \Rightarrow \inf\{|b_n|; n\in\mathbb{N}\} > 0$$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{3n}\ \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{5n-2}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{4n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{4n+1}} =$

2

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{5n-2}\right)}{n+3-(4n+1)} \cdot \left(\sqrt{n+3}+\sqrt{4n+1}\right) =$

2

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{5n-2}\right)}{-3n+2} \cdot \left(\sqrt{n+3}+\sqrt{4n+1}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{n}}_{\sqrt{n}\ \to\ \infty} \cdot \frac{\sqrt{3}}{-3+\frac{2}{n}} \left(\sqrt{1-\underset{\to 0}{1/n}}+\sqrt{5-\underset{\to 0}{2/n}}\right)\left(\sqrt{1+\underset{\to 0}{3/n}}+\sqrt{4+\underset{\to 0}{1/n}}\right)$

2

$\overset{AL}{=} \infty \frac{\sqrt{3}}{-3+0}\left(\sqrt{1-0}+\sqrt{5-0}\right)\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{4+0}\right) = \underline{\underline{-\infty}}$

Vo√

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+(-1)^n+n} = 2$ ze 2 pol

$2 = \sqrt[n]{2^n} \le \sqrt[n]{2^n+\underbrace{n-1}_{\ge 0}} \le \sqrt[n]{2^n+(-1)^n+n} \le \sqrt[n]{2^n+2^n+2^n} = \sqrt[n]{3}\cdot 2$

od jist. n_0

$\downarrow 2$ $\qquad\qquad \downarrow 1\cdot 2 = 2$

$n \le 2^n$

$\frac{n}{2^n} \le 1 \qquad \lim \frac{n}{2^n} = 0$ tedy $\exists n_0\ \forall n \ge n_0$ $\frac{n}{2^n}\le 1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^n \underbrace{\frac{5+\sqrt{n}+\cos(n\pi)}{\log n-\sqrt{2n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n}}_{b_n}}_{a_n}$

$\lim b_n = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\frac{5}{\sqrt{n}}+1+\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}}{\frac{\log n}{\sqrt{n}}-\sqrt{2}+\frac{(2/3)^n}{\sqrt{n}}}$

$\frac{5}{\sqrt n}\to 0$, $\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt n}$: 0 omez, $\frac{\log n}{\sqrt n}$: 0 škále, $\frac{(2/3)^n}{\sqrt n}\to 0$, $\frac{0}{\infty}$

$\overset{AL}{=} \frac{0+1+0}{0-\sqrt{2}+0} = \underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

Z VO lim vybr posl i $\lim b_{2n} = \lim b_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Pak $\lim a_{2n} = \lim b_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\lim a_{2n-1} = \lim -b_{2n-1} = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ } tedy $\lim a_n \nexists$ (Spor s VO lim vybr. posl a jednoznačnosti lim)

③ (a) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \overset{?}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Platí. Máme $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot a_n \cdot \frac{1}{a_n} \overset{AL}{=} \underbrace{\lim a_n b_n}_{L \in \mathbb{R}} \cdot \lim \frac{1}{a_n} = L \cdot \frac{1}{\infty} = 0$

(b) $\exists \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$, $\sup\{|a_n| < \infty\} \overset{?}{\Rightarrow} \inf\{|b_n|\} > 0$

Neplatí. Protipříklad $a_n = 1 \quad \forall n$

$b_1 = 0$

$b_n = 1 \quad \forall n \geq 2$

Pak $\lim a_n b_n = 1$, ale $\inf\{|b_n|\} = \inf\{0, 1\} = 0$.