



14. cvičení - Separabilní a souvislé prostory

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Souvislé prostory

Definice 1. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *souvislý*, jestliže není sjednocením dvou neprázdných disjunktních otevřených množin.

Věta 2 (Charakterizace souvislých prostorů). Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

1. Prostor X není souvislý.
2. Existují dvě neprázdne disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset X$ uzavřené v (X, ρ) a takové, že $X = F_1 \cup F_2$.
3. Existuje obojetná neprázdna množina H splňující $H \neq X$.
4. Existuje spojitě surjektivní zobrazení $f : (X, \rho) \rightarrow (\{0, 1\}, \rho_{diskr})$.

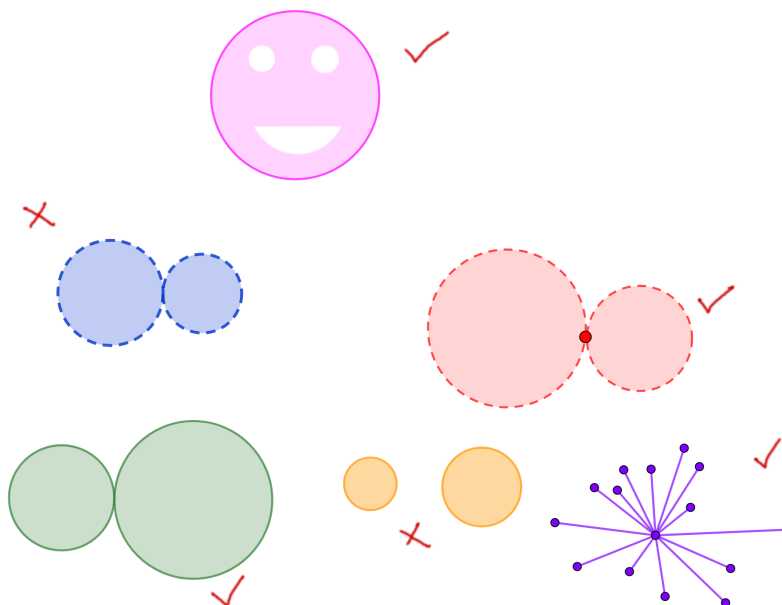
Poznámka 3 (Jiná definice). Prostor (X, ρ) je nesouvislý, jestliže existují disjunktní neprázdne množiny $A, B \subseteq X$ takové, že $X = A \cup B$ a $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Definice 4. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $J \subset X$. Řekneme, že J je *křivka* v prostoru (X, ρ) , jestliže existuje spojitě zobrazení $f : [0, 1] \rightarrow (X, \rho)$ takové, že $f([0, 1]) = J$.

Řekneme, že množina $A \subset X$ je *křivkově souvislá* v prostoru (X, ρ) , jestliže pro každé $a, b \in A$ existuje spojitě zobrazení $f : [0, 1] \rightarrow (A, \rho)$ takové, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$.

Věta 5 (O vztahu souvislosti a křivkové souvislosti). Každá křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je v tomto prostoru souvislá.

Úloha 6. Které množiny (jsme v $\mathbb{R}^2$) jsou souvislé?



Úloha 7 (PRAVDA – NEPRAVDA).

NE Necht' A není souvislý. Pak $\bar{A}$ není souvislý. Např. $(0, 1) \cup (1, 2)$.

ANO Necht' A je souvislý. Pak $\bar{A}$ je souvislý.

NE Necht' A je souvislý. Pak $\text{int } A$ je souvislý. Např. dva dotýkající se uzavřené kruhy.

ANO Necht' $\bar{A}$ není souvislý. Pak A není souvislý.

Úloha 8 (PRAVDA – NEPRAVDA).

NE Necht' A není souvislý. Pak A^c není souvislý. Např. doplněk dvou disjunktních kruhů.

NE Necht' A je souvislý. Pak A^c není souvislý. Např. doplněk kruhu.

NE Necht' A je souvislý. Pak A^c je souvislý. Např. A je nekonečný jednotkový pruh podél osy x .

NE Necht' A a B jsou souvislé. Pak $A \cup B$ je souvislá. Např. dva disjunktní kruhy.

NE Necht' A a B jsou souvislé. Pak $A \cap B$ je souvislá. Např. když se protnou na koncích dvě fazole.

Úloha 9. Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor souvislý?

Řešení: Právě tehdy, když má jen jeden prvek

Úloha 10. Ukažte, že prostor $X = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ je křivkově souvislý.

Řešení: Zvolme dva body $x, y \in X$. Vytvořme úsečku s krajními body x, y a její osu O .

Pak lze najít takový bod $b \in O$, že úsečky xb a by neprotínají $\mathbb{Q}^2$. Zároveň je tato dvojice úseček hledaná spojnice bodů x a y .

Pokud by každá dvojice protínala množinu $\mathbb{Q}^2$, znamenalo by to, že dvojic úseček je jen spočetně, což je spor.

2 Separabilní prostory

Definice 11. Necht' (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset X$ je *hustá*, pokud $\bar{A} = X$.

Metrický prostor (X, ρ) se nazývá *separabilní*, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina.

Úloha 12. (Příklad máme z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>. Tamtéž opsána některá řešení.)

1. Ukažte, že $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou separabilní.

Řešení:

Hledáme spočetnou a hustou podmnožinu A . Pro $\mathbb{R}$ je $A = \mathbb{Q}$, pro $\mathbb{C}$ je to množina bodů s racionálními souřadnicemi - $a = bi$, $a, b \in \mathbb{Q}$.

Pro $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ uvažujme A^n - body s racionálními souřadnicemi.

Prostor $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je separabilní. Uvažujme množinu $M := \{q + \pi, q \in \mathbb{Q}\}$. Pak $M \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je spočetná.

Hustota: Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a uvažujme číslo $x - \pi$. Protože $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, tak existuje $p \in \mathbb{Q}$ takové, že $|x - \pi - p| < \varepsilon$. Pak ale $|x - (p + \pi)| < \varepsilon$. Tedy k x jsme našli blízké číslo $p + \pi \in M$, což bylo dokázati.

2. Ukažte, že $(C([0, 1]), \rho_{\text{sup}})$ je separabilní.

Řešení: A je množina všech polynomů s racionálními koeficienty.

Zvolme $f \in C[0, 1]$. Pak z Weierstrassovy věty existuje takový polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, že

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Ke koeficientům a_n najdeme racionální koeficienty b_n tak, že

$$\sum_{i=0}^n |a_i - b_i| < \varepsilon.$$

(Lze z předchozího příkladu.)

Uvažujme polynom $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$. Pak

$$\sup_{x \in [0, 1]} |P(x) - Q(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{i=0}^n (a_i - b_i) x^i \right| \leq \sum_{i=0}^n |a_i - b_i| x^i \leq \sum_{i=0}^n |a_i - b_i| < \varepsilon.$$

Dohromady

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - Q(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - P(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |P(x) - Q(x)| < \varepsilon + \varepsilon.$$

3. Za jakých podmínek je separabilní diskrétní metrický prostor?

Řešení: Konvergentní posloupnost v diskrétním prostoru musí být od jistého bodu konstantní. Z toho plyne, že jediná hustá množina v diskrétním prostoru je celé X . Aby X byl separabilní, musí být X spočetná.

4. Ukažte, že $L^1([0, 1])$ je separabilní.

Řešení: Necht' M je množina takových jednoduchých funkcí, které mají hodnoty v $\mathbb{Q}$ a zároveň jsou definované pomocí intervalů s racionálními koncovými body. Pak M je hustá a spočetná.

Věta 13. Necht' (X, ρ) je metrický prostor. Jestliže existuje nespočetná množina $A \subset X$ a $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\rho(x, y) \geq \varepsilon$, pak X není separabilní.

Poznámka 14. Necht' $p \in [1, \infty)$ a l^p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}.$$

Poznámka 15. Označme l_{∞} prostor všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ a c_0 prostor všech (omezených) reálných posloupností $\{x_n\}$ s $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Oba jsou s metrikou

$$\rho_{\infty}(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 16. (Příklad máme z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>. Tamtéž opsána řešení.) Ukažte, že

1. l^∞ není separabilní.

Řešení: Uvažujme $P = 2^{\mathbb{N}}$, množinu všech podmnožin přirozených čísel. Taková množina je nespočetná. Pro $A, B \in P$, $A \neq B$ sestrojme χ_A a χ_B - posloupnosti 0 a 1.

Pak platí

$$\rho_\infty(\chi_A, \chi_B) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\chi_A - \chi_B| = 1.$$

Pak dle Věty 13 prostor l_∞ nemůže být separabilní.

2. c_0 je separabilní.

Řešení: Uvažujme množinu

$$A_n = \{x = \{x_i\} \in c_0; x_i \in \mathbb{Q}, x_i = 0 \text{ pro } i > n\}$$

- posloupnosti s racionálními členy, které jsou navíc od daného n nulové.

Dále položíme $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Pak A je spočetná (sjednocení spočetných) a hustá v c_0 .

Zvolme $y = \{y_i\} \in c_0$. Protože $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$, lze ke každému ε najít n_0 takové, že pro $i > n_0$ je $|y_i| < \varepsilon$.

Pro každé $i \leq n_0$ najdeme $r_i \in \mathbb{Q}$ tak, že $|r_i - y_i| < \varepsilon$. Sestrojíme posloupnost

$$x_i = \begin{cases} r_i, & i \leq n_0, \\ 0, & i > n_0. \end{cases}$$

Pak $x \in A_{n_0}$ a platí

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i| = \max\left\{\sup_{i \leq n_0} |x_i - y_i|, \sup_{i > n_0} |x_i - y_i|\right\} < \varepsilon.$$

Úloha 17. Rozhodněte, zda pampeliškový prostor je separabilní. $X = \mathbb{R}^2$, pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ máme

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & A, B \text{ leží na stejném poloměru,} \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení: Uvažujme spočetnou hustou množinu M .

Pro každý bod x (krom počátku) musí blízký bod m z M ležet na polopřímce spojující x s počátkem (jinak bychom šli přes střed, což by dalo obrovskou vzdálenost). Tedy se ptáme, jestli každá polopřímka obsahuje dostatek bodů z M .

Předpokládejme, že na každé polopřímce leží alespoň jeden bod z M (zároveň nemůže ležet na více přímkách najednou). Polopřímek je ale nespočetně - každá odpovídá jednomu úhlu z intervalu $[0, 2\pi)$, což je nespočetná množina.

Tedy jsme ve sporu a pampeliškový prostor není separabilní.

Úloha 18. Označme L_0 prostor všech lipschitzovských funkcí z $[0, 1]$ do $\mathbb{R}$ takových, že $f(0) = 0$. Zavedme metriku

$$\rho(f, g) = \sup \left\{ \frac{|(f - g)(x) - (f - g)(y)|}{|x - y|}; x \neq y \right\}$$

- jde o lipschitzovskou konstantu funkce $f - g$.

Ukažte, že prostor L_0 není separabilní.

(Zdroj: <http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/29-mtr/lekce29-mtr-pmax.pdf>)

Řešení: Uvažujme M - množinu funkcí které se rovnají 0 na $[0, r]$ a pak se rovnají $x - r$ pro různá $r \in [0, 1]$. Tato množina je nespočetná.

Zvolme $f, g \in M$ s příslušnými $r_f < r_g$.

Obrázek: <https://www.geogebra.org/calculator/w45zzxfk>

Lipschitzovská konstanta $f - g$ je 1. Tedy jsme našli nespočetnou množinu z Věty 13 a množina není separabilní.

3 Vzorová písemka

- 1) (12 bodů) Sečtěte

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}.$$

- 2) (16 bodů) Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n^2 + x^2}.$$

Je funkce daná součtem řady spojitá na $\mathbb{R}$?

- 3) (12 bodů) Nalezněte 2π -periodickou funkci f , která je na intervalu $[-\pi, 0)$ dána předpisem

$$f(x) = -x - \pi,$$

a má sinovou Fourierovu řadu. Tuto Fourierovu řadu spočtěte. K čemu konverguje tato řada bodově a na kterých intervalech konverguje stejnoměrně?

- 4) (10 bodů) Nechť $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- a) Nechť $f, g \in BV([0, 1])$, pak $f(x) \cdot g(x) \in BV([0, 1])$.
- b) Nechť $f, g \in AC([0, 1])$, pak $f(x) \cdot g(x) \in AC([0, 1])$.
- c) Nechť $f, g \in BV([0, 1])$, pak $f(g(x)) \in BV([0, 1])$.

- 1') (10 bodů) Na $[0, \infty)$ vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}.$$

(10) Hledejte spojitice bodů x a y , které jdou přes osu	(16.1) Posloupnost typu XA , $A \subset \mathbb{N}$
úsečky $x_i y_i$.	(16.2) Posloupnost s $\mathbb{Q}$ členy
(12.2) polynomy s $\mathbb{Q}$ koeficienty	(17) Zvolte bod x . Kde musí ležet jeho hustý kamarád?
(12.3) jak vypadá konvergence v disktr. prostoru?	A kolik je poloprůmek, které procházejí počátkem?
(12.4) co některé jednoduché funkce?	

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{2n+3}$$

$$1/\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n} = 1$$

$$x \in (-1, 1)$$

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$f = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 + \frac{-1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + k$$

$$f(0) = 0 = 0 - \arctan 0 + k \rightarrow k = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - \arctan x = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Leibniz

Abel

$$\frac{1}{2n+3} \searrow 0$$

$$(1') \quad f_u(x) = u^2 x^2 e^{-ux} \quad x \in [0, \infty)$$

$$\bullet \text{ fix } x \in [0, \infty)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^2 x^2}{e^{ux}} = 0 \quad \text{tedy } f \equiv 0$$

$$\bullet \text{ fix } u$$

$$P_n = \sup_{x \in [0, \infty)} |u^2 x^2 e^{-ux}|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f_u(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_u(x) = 0$$

stačí uvaž. 4

$$f'_u = u^2 (2x e^{-ux} + x^2 e^{-ux} (-u)) = u^2 x e^{-ux} (2 - ux)$$

$$2 - ux = 0$$

$$2 = ux$$

$$\frac{2}{u} = x_0$$

$$f_u(x_0) = u^2 \cdot \frac{4}{u^2} e^{-u \cdot \frac{2}{u}} = 4e^{-2}$$

$$\bullet \lim_{u \rightarrow \infty} P_n \neq 0 \quad \Rightarrow f_u \not\equiv f \text{ na } [0, \infty)$$

$$\bullet \text{ Navíc } f_u \not\equiv f \text{ na } [0, \infty): \text{ p. 10}$$

Zvolíme kpt $[0, a]$, $a > 0$.

Proč pro každé n $\frac{2}{n} \in [0, a]$, tedy $f_u \not\equiv f$ na $[0, a]$,

tedy $f_u \not\equiv f$ na $[0, \infty)$

$$(2) f = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n x}{n^2 + x^2}}_{f_n}$$

Je f spojita

fix $x \in \mathbb{R}$

Paž $\sum 0 \leq$

$$\sum \frac{(-1)^n x}{n^2 + x^2} \quad \text{LSP s } \frac{1}{n^2}$$

fix $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \underbrace{\frac{x}{n^2 + x^2}}_{g_n} \right|$$

$$g'_n = \frac{n^2 + x^2 - x \cdot 2x}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}$$

$$\begin{aligned} n^2 - x^2 &= 0 \\ \pm n &= x \end{aligned}$$

$$g_n(u) = \frac{u}{n^2 + u^2} = \frac{1}{2u}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{n^2 + x^2} = 0$$

$$\Gamma_n = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Tedy $g_n \rightarrow 0$

Dále fix $x \in [0, \infty)$

$$g_n \geq g_{n+1}$$

$$\frac{x}{n^2 + x^2} \geq \frac{x}{(n+1)^2 + x^2}$$

$$x((n+1)^2 + x^2) \geq x(n^2 + x^2) \quad \checkmark$$

$$x \in (-\infty, 0)$$

$$g_n \leq g_{n+1}$$

$$x((n+1)^2 + x^2) \leq x(n^2 + x^2) \quad \checkmark$$

g_n je monotoni

Navi $\sum a_n = \sum (-1)^n$ maj stejne on. c. součty

Paž z Dirichlet

$$\sum (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2} \rightarrow \text{ne } \mathbb{R}$$

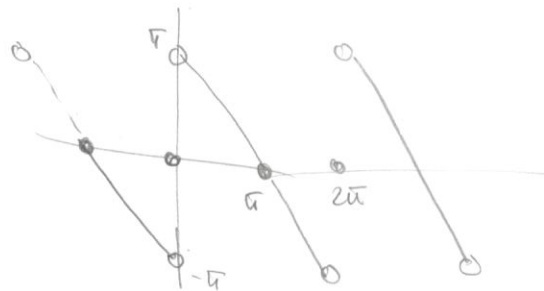
tedy f je spoj.

(f_n spoj na $\mathbb{R}$)

(3) $f = -x - \pi$ na $[-\pi, 0)$

sin. FZ

$$V(f, [-\pi, \pi]) = \pi + 2\pi + \pi = 4\pi < \infty$$



$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x - \pi) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{-x-\pi}{n} \right) \left(-\frac{\cos(nx)}{n} \right) \right)_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{\cos(nx)}{n} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{(x+\pi) \cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^0 - \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_{-\pi}^0 \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} - 0 - 0 \right)$$

$$S_f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nx)$$

$$S_f \rightarrow g = \begin{cases} -\pi - (x - 2k\pi) & x \in [-\pi, 0] + 2k\pi \\ 0 & x = 0 + 2k\pi \\ \pi - (x - 2k\pi) & x \in (0, \pi] + 2k\pi \end{cases}$$

$S_f \xrightarrow{\text{loc}} g$ na $(0, 2\pi) + 2k\pi$
 $\nabla \quad (g \text{ spoj na } (0, 2\pi))$

$S_f \not\xrightarrow{\text{loc}} g$ na $\mathbb{R}$: g je u $0 + 2k\pi$ niespoj. ta, coz by byl spr. s stepow. funk.

(4) $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

(a) $f, g \in BV \stackrel{?}{\Rightarrow} f \cdot g \in BV$

Plati

Uvažujme dělení $\{x_i\}_{i=1}^n$ intervalu $[a, b]$.

Odhadneme

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})|$$

tedy:

$$\leq \sum |f(x_i)| \cdot |g(x_i) - g(x_{i-1})| + |g(x_{i-1})| \cdot |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

f a g jsou omezené (bylo na cviču), tedy $\text{konst. } L \text{ a } M$

$$\leq \sum M \cdot |g(x_i) - g(x_{i-1})| + L \cdot |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

vezmeme-li sup přes dělení, dostaneme

$$V(fg, [a, b]) \leq M \cdot V(g, [a, b]) + L \cdot V(f, [a, b]) < \infty$$

(c) $f, g \in BV \stackrel{?}{\Rightarrow} f(g) \in BV$

Neplatí

$$f = \sqrt{x} \quad g = x^2 \sin^2 \frac{1}{x} \quad g(0) = 0$$

$\hookrightarrow$ monot. $\rightarrow$ má konečnou variaci

$\hookrightarrow$ má kon. variaci (bylo na cviču)

$$\text{Pak } f(g) = |x \sin \frac{1}{x}|$$

$\hookrightarrow$ nemá BV $\rightarrow$ bylo (sžoro) na cviču

(b) $f, g \in C \stackrel{?}{\Rightarrow} fg \in C$

platí. (Bylo na cviču)

$\|fg\| < M$ (spoj. je' ne' pt $\rightarrow$ omezené).

Uvažujme δ : $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta$.
a intervaly

Maße $\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$ $\sum_{j=1}^n |g(b_j) - g(a_j)| < \varepsilon$.

Daher

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |f(b_j)g(b_j) - f(a_j)g(a_j)| &\leq \\ &\leq \sum |f(b_j)| \cdot |g(b_j) - g(a_j)| + |g(a_j)| \cdot |f(b_j) - f(a_j)| \\ &\leq M \cdot \varepsilon + M \varepsilon \end{aligned}$$

□