



14. cvičení - Separabilní a souvislé prostory

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Souvislé prostory

Definice 1. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *souvislý*, jestliže **není** sjednocením dvou neprázdných disjunktních otevřených množin.

Věta 2 (Charakterizace souvislých prostorů). Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

1. Prostor X není souvislý.
2. Existují dvě neprázdné disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset X$ uzavřené v (X, ρ) a takové, že $X = F_1 \cup F_2$.
3. Existuje obojetná neprázdna množina H splňující $H \neq X$.
4. Existuje spojitě surjektivní zobrazení $f : (X, \rho) \rightarrow (\{0, 1\}, \rho_{\text{diskr}})$.

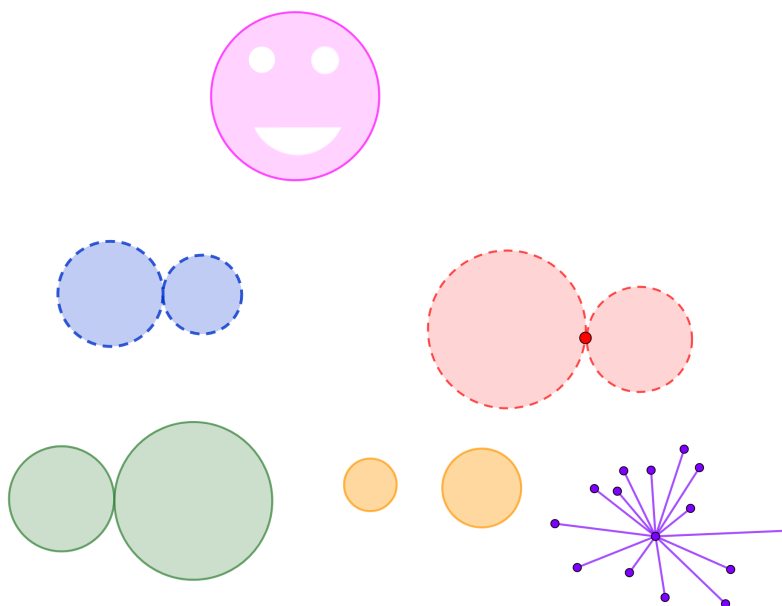
Poznámka 3 (Jiná definice). Prostor (X, ρ) je *nesouvislý*, jestliže existují disjunktní neprázdne množiny $A, B \subseteq X$ takové, že $X = A \cup B$ a $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Definice 4. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $J \subset X$. Řekneme, že J je *křivka* v prostoru (X, ρ) , jestliže existuje spojitě zobrazení $f : [0, 1] \rightarrow (X, \rho)$ takové, že $f([0, 1]) = J$.

Řekneme, že množina $A \subset X$ je *křivkově souvislá* v prostoru (X, ρ) , jestliže pro každé $a, b \in A$ existuje spojitě zobrazení $f : [0, 1] \rightarrow (A, \rho)$ takové, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$.

Věta 5 (O vztahu souvislosti a křivkové souvislosti). Každá křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je v tomto prostoru souvislá.

Úloha 6. Které množiny (jsme v $\mathbb{R}^2$) jsou souvislé?



Úloha 7 (PRAVDA – NEPRAVDA).

ANO–NE Necht A není souvislý. Pak $\bar{A}$ není souvislý.

ANO–NE Necht A je souvislý. Pak $\bar{A}$ je souvislý.

ANO–NE Necht A je souvislý. Pak $\text{int } A$ je souvislý.

ANO–NE Necht $\bar{A}$ není souvislý. Pak A není souvislý.

Úloha 8 (PRAVDA – NEPRAVDA).

ANO–NE Necht A není souvislý. Pak A^c není souvislý.

ANO–NE Necht A je souvislý. Pak A^c není souvislý.

ANO–NE Necht A je souvislý. Pak A^c je souvislý.

ANO–NE Necht A a B jsou souvislé. Pak $A \cup B$ je souvislá.

ANO–NE Necht A a B jsou souvislé. Pak $A \cap B$ je souvislá.

Úloha 9. Za jakých podmínek je diskretní metrický prostor souvislý?

Úloha 10 ($\heartsuit$). Ukažte, že prostor $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ je křivkově souvislý.

2 Separabilní prostory

Definice 11. Necht (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset X$ je *hustá*, pokud $\bar{A} = X$.

Metrický prostor (X, ρ) se nazývá *separabilní*, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina.

Úloha 12. 1. Ukažte, že $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou separabilní.

2. $\heartsuit$ Ukažte, že $(C([0, 1]), \rho_{\text{sup}})$ je separabilní.

3. $\clubsuit$ Za jakých podmínek je separabilní diskretní metrický prostor?

4. $\spadesuit$ Ukažte, že Lebesgueův prostor $L^1([0, 1])$ je separabilní.

Věta 13. Necht (X, ρ) je metrický prostor. Jestliže existuje nespočetná množina $A \subset X$ a $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\rho(x, y) \geq \varepsilon$, pak X není separabilní.

Poznámka 14. Necht $p \in [1, \infty)$ a l^p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}.$$

Poznámka 15. Označme l_{∞} prostor všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ a c_0 prostor všech (omezených) reálných posloupností $\{x_n\}$ s $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Oba jsou s metrikou

$$\rho_{\infty}(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

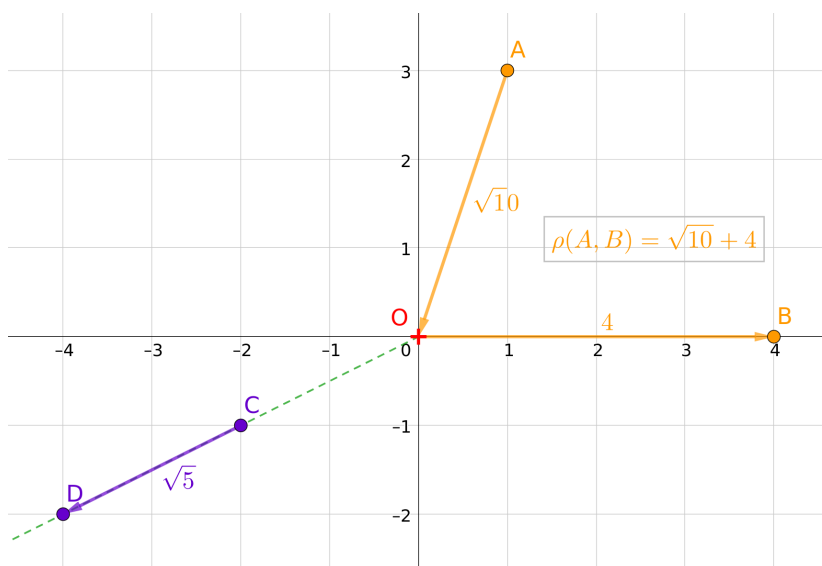
Úloha 16 (♥). UkaŹte, Źe

1. l^∞ není separabilní.

2. c_0 je separabilní.

Úloha 17 (♣). Rozhodněte, zda pampeliřkový prostor je separabilní. PoloŹme $X = \mathbb{R}^2$, pro prvky $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ pak máme metriku

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & A, B \text{ leŹí na stejném poloměru,} \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{jinak.} \end{cases}$$



Úloha 18. Označme L_0 prostor všech lipschitzovských funkcí z $[0, 1]$ do $\mathbb{R}$ takových, Źe $f(0) = 0$. Zaveďme metriku

$$\rho(f, g) = \sup \left\{ \frac{|(f - g)(x) - (f - g)(y)|}{|x - y|}; x \neq y \right\}$$

- jde o lipschitzovskou konstantu funkce $f - g$.

UkaŹte, Źe prostor L_0 není separabilní.

Návod: UvaŹujte funkce, které se rovnají 0 na $[0, r]$ a pak se rovnají $x - r$ pro různá $r \in [0, 1]$. Obrázek k návodu: <https://www.geogebra.org/calculator/w45zzxfk>

3 Vzorová písemka

1) (12 bodů) Sečtěte

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}.$$

2) (16 bodů) Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n^2 + x^2}.$$

Je funkce daná součtem řady spojitá na $\mathbb{R}$?

- 3) (12 bodů) Nalezněte 2π -periodickou funkci f , která je na intervalu $[-\pi, 0)$ dána předpisem

$$f(x) = -x - \pi,$$

a má sinovou Fourierovu řadu. Tuto Fourierovu řadu spočtete. K čemu konverguje tato řada bodově a na kterých intervalech konverguje stejnoměrně?

- 4) (10 bodů) Nechť $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- a) Nechť $f, g \in BV([0, 1])$, pak $f(x) \cdot g(x) \in BV([0, 1])$.
- b) Nechť $f, g \in AC([0, 1])$, pak $f(x) \cdot g(x) \in AC([0, 1])$.
- c) Nechť $f, g \in BV([0, 1])$, pak $f(g(x)) \in BV([0, 1])$.

- 1') (10 bodů) Na $[0, \infty)$ vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}.$$



Figure 1: <https://www.meme-arsenal.com/en/create/template/805594>

(10) Hledejte spojnici bodů x a y , které jdou přes osu	(16.1) posloupnosti typu XA , $A \subset \mathbb{N}$
úsečky xy .	(16.2) posloupnosti s $\mathbb{Q}$ členy
(12.2) polynomy s $\mathbb{Q}$ koeficienty	(17) Zvolte bod x . Kde musí ležet jeho hustý kamarád?
(12.3) jak vypadá konvergence v diskř. prostoru?	A kolik je poloprímek, které procházejí počátkem?
(12.4) co některé jednoduché funkce?	