



13. cvičení - Lipschitzovské funkce a Totálně omezené prostory

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1

Definice 1. Necht (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \rightarrow Y$ a $K > 0$. Řekneme, že zobrazení f je K -lipschitzovské, jestliže

$$\forall x, y \in X : \sigma(f(x), f(y)) \leq K\rho(x, y).$$

Řekneme, že f *lipschitzovské*, jestliže existuje $K > 0$ takové, že f je K -lipschitzovské.

Pro $X = Y = \mathbb{R}$ dostaneme

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Poznámka 2. Zatímco AC a BV funkce pracovaly s uzavřeným a omezeným intervalem $[a, b]$, tak u lipschitzovských funkcí může být interval otevřený i neomezený.

Úloha 3. Ukažte, že funkce jsou lipschitzovské

1. $|x|$ na $[-1, 1]$

Řešení: Zvolme $x, y \in [-1, 1]$. Pak

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

(Lipschitzovská konstanta je 1.)

2. x^2 na $[1, 2]$

Řešení:

Zvolme $x, y \in [1, 2]$. Pak

$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq (2 + 2)|x - y|.$$

(Lipschitzovská konstanta je 4.)

3. x na $\mathbb{R}$

Řešení: Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí, že

$$|x - y| \leq 1 \cdot |x - y|.$$

(Lipschitzovská konstanta je 1.)

Úloha 4. Ukažte, že funkce nejsou lipschitzovské

1. x^2 na $\mathbb{R}$

Řešení:

Zvolme $N > 0$ a $x = N$ a $y = 2N$. Pak

$$|x^2 - y^2| = 3N^2 = 3N|x - y| > N|x - y|.$$

2. $\sqrt{x}$ na $[0, 1]$

Problém je poblíž 0. Zvolme tedy $1 > n > 0$ (malé n) a $x = 0$ a $y = 1/n$. Pak

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \sqrt{n}|x - y|.$$

Ale protože pro každé $N > 0$ najdeme n tak, že $N < \sqrt{n}$, dostaneme

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| > N|x - y|.$$

Úloha 5. Necht' X je množina slov skládající se z 10 písmen (používáme 26 prvkovou anglickou abecedu). Metriku ρ definujme jako počet pozic s rozdílnými písmeny. Např.

$$\rho(JEDNOROZCI, CHOBOTNICE) = 8,$$

$$\rho(LOSANGELES, LOUISVILLE) = 7,$$

$$\rho(ABCXYZQRTY, AACXYUQRTY) = 2.$$

Pro slovo z 10 písmen $\alpha = x_1, x_2, \dots, x_{10}$ definujme zobrazení

$$f(\alpha) = a, x_2, \dots, x_{10}$$

(první písmeno jsme nahradili písmenem a).

Rozhodněte, zda je f lipschitzovské zobrazení.

Řešení:

Uvažujme slova α a β , která už mají první písmeno shodné. Pak

$$\rho(f(\alpha), f(\beta)) = \rho(\alpha, \beta).$$

Pokud slova α a β naopak mají první písmeno rozdílné, tak se jejich vzdálenost o 1 zmenší, tedy

$$\rho(f(\alpha), f(\beta)) = \rho(\alpha, \beta) - 1 < \rho(\alpha, \beta).$$

Lipschitzovská konstanta je tedy rovna 1.

Úloha 6. Necht' f, g jsou lipschitzovské na $\mathbb{R}$. Ukažte, že je lipschitzovská i funkce

1. $f + g$

Řešení:

Pro $x, y \in \mathbb{R}$ máme $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$ a $|g(x) - g(y)| < L|x - y|$. Pak

$$|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq K|x - y| + L|x - y| = (K + L)|x - y|.$$

2. $f(g)$

Řešení: Pro $x, y \in \mathbb{R}$ máme $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$ a $|g(x) - g(y)| < L|x - y|$. Pak

$$|f(g(x)) - f(g(y))| \leq K|(g(x)) - (g(y))| \leq KL|x - y|.$$

Úloha 7. Ukažte, že lipschitzovská funkce má konečnou variaci (na intervalu $[a, b]$).

Řešení:

Zvolme dělení $\{x_i\}$ intervalu $[a, b]$. Pak

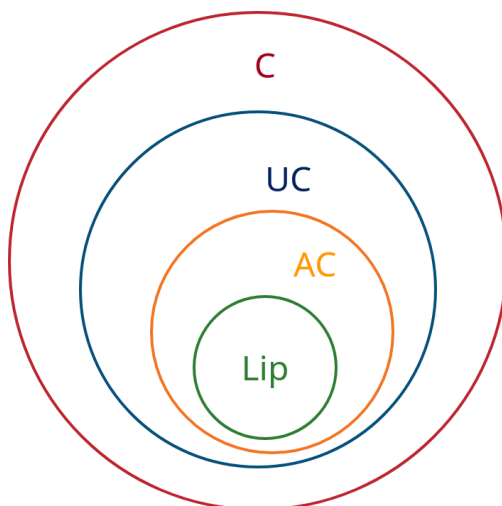
$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n K|x_i - x_{i-1}| \leq K|b - a|.$$

Úloha 8. Najděte funkci, která je AC, ale není Lip.

Řešení:

Např. $\sqrt{x}$.

Úloha 9. Nakreslete Vennův diagram pro funkce spojitě (C), lipschitzovské (Lip), stejnoměrně spojitě (UC) a absolutně spojitě (AC) na $[a, b]$.



Úloha 10. Vyslovte (a zdůvodněte) hypotézu o vztahu omezených a lipschitzovských funkcí. Jsou tam nějaké podmínky?

Řešení:

Lipschitzovská funkce nemusí být omezená, např. x na $\mathbb{R}$.

Omezená funkce nemusí být lipschitzovská, např. $\sqrt{x}$ na $[0, 1]$.

Ale pokud jsme na omezeném intervalu $[a, b]$, pak lipschitzovská funkce musí být omezená. Např. proto, že je spojitá na kompaktu, tedy omezená.

Opačně to stále neplatí ani pro kompaktní interval.

Úloha 11. Je nějaký vztah mezi lipschitzovskými a diferencovatelnými funkcemi na $[a, b]$?

Řešení:

Na přednášce byla věta: Lipschitzovská funkce na $[a, b]$ má konečnou derivaci skoro všude na $[a, b]$.

Obecně lipschitzovská funkce nemusí mít derivaci, např. $|x|$.

Pokud ale je f diferencovatelná na $[a, b]$ a navíc $|f'| < M$, tak už je lipschitzovská.

Zvolme $a \leq x \leq y \leq b$. Pak z Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje ξ tak, že $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$. Pak

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y - x| \leq M|y - x|.$$

2

Definice 12. Necht (X, ρ) je metrický prostor, necht $\varepsilon > 0$. Řekneme, že $M \subset X$ je ε -síť v X , jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje bod $y \in M$ takový, že $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Definice 13. Metrický prostor (X, ρ) se nazývá *totálně omezený*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε -sít.

Poznámka 14. • Někdy se říká i *prekompaktní*.

- Definici lze potkat i takto: Z každého ε -pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Úloha 15. Za jakých podmínek je diskretní metrický prostor omezený? Za jakých je totálně omezený?

Řešení: Jelikož koule v diskretním metrickém prostoru jsou buď jeden bod nebo celý prostor, je diskretní metrický prostor vždy omezený.

Z téhož důvodu je totálně omezený právě tehdy, když má konečný počet prvků.

Úloha 16. Uvažujte prostor l^2 . Jeho jednotková sféra je omezená množina. Ukažte, že není totálně omezená.

Řešení: Uvažujme M množinu posloupností a_n , které mají na n -tém místě 1, jinde 0.

Pak $\rho(a_n, b_n) = \sqrt{2}$.

Zvolme tedy $\varepsilon = 1/8$ a ε -sít S . Pak ale S nemůže být konečná, protože potřebuje nekonečně mnoho bodů (a ε -koulí) aby pokryla M .

Úloha 17 (PRAVDA – NEPRAVDA).

ANO Totálně omezená množina je omezená.

NE Omezená množina je totálně omezená.

Úloha 18. Ukažte, že uzávěr totálně omezeného prostoru je totálně omezený.

Řešení: Nechť A je totálně omezený. Pak lze najít konečnou $\varepsilon/2$ -sít

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

takovou, že

$$A \subseteq \bigcup_{i=1, \dots, n} B(x_i, \varepsilon/2).$$

Pak $\bar{A} \subseteq \bigcup_{i=1, \dots, n} B(x_i, \varepsilon)$.

Zvolme $x \in \bar{A}$. Pak každá koule se středem v x protíná A . Speciálně tedy existuje $y \in B(x, \varepsilon/2) \cap A$.

Zároveň toto $y \in B(x_i, \varepsilon/2)$ pro nějaké i . Ale pak

$$\rho(x, x_i) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x_i) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Hotovo.

Úloha 19. Najděte příklad metrického prostoru, který je totálně omezený, ale není kompaktní.

Řešení: Např. interval $(2, 4)$ - není uzavřený.