



13. cvičení - Lipschitzovské funkce a Totálně omezené prostory

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Lip

Definice 1. Necht (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \rightarrow Y$ a $K > 0$. Řekneme, že zobrazení f je K -lipschitzovské, jestliže

$$\forall x, y \in X : \sigma(f(x), f(y)) \leq K\rho(x, y).$$

Řekneme, že f *lipschitzovské*, jestliže existuje $K > 0$ takové, že f je K -lipschitzovské.

Pro $X = Y = \mathbb{R}$ dostaneme

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Poznámka 2. Zatímco AC a BV funkce pracovaly s uzavřeným a omezeným intervalem $[a, b]$, tak u lipschitzovských funkcí může být interval **otevřený i neomezený**.

Úloha 3. Ukažte, že funkce jsou lipschitzovské

1. $\clubsuit|x|$ na $[-1, 1]$

2. $\clubsuit x^2$ na $[1, 2]$

3. x na $\mathbb{R}$

Úloha 4 ($\clubsuit$). Ukažte, že funkce nejsou lipschitzovské

1. x^2 na $\mathbb{R}$

2. $\sqrt{x}$ na $[0, 1]$

Úloha 5. Necht X je množina slov (ne nutně smysluplných) skládající se z 10 písmen (používáme 26 prvkovou anglickou abecedu). Metriku ρ definujme jako počet pozic s rozdílnými písmeny. Např.

$$\rho(JEDNOROZCI, CHOBOTNICE) = 8,$$

$$\rho(LOSANGELES, LOUISVILLE) = 7,$$

$$\rho(ABCXYZQRTY, AACXYUQRTY) = 2.$$

Pro slovo z 10 písmen $x = x_1, x_2, \dots, x_{10}$ definujme zobrazení

$$f(x) = a, x_2, \dots, x_{10}$$

(první písmeno jsme nahradili písmenem a).

Rozhodněte, zda je f lipschitzovské zobrazení.

Úloha 6. Necht f, g jsou lipschitzovské na $\mathbb{R}$. Ukažte, že je lipschitzovská i funkce

1. $f + g$

2. $f(g)$

Úloha 7 ($\clubsuit$). Ukažte, že lipschitzovská funkce má konečnou variaci (na intervalu $[a, b]$).

Úloha 8. Najděte funkci, která je AC , ale není Lip.

Úloha 9. Nakreslete Vennův diagram pro funkce spojitě, lipschitzovské, stejnoměrně spojitě a absolutně spojitě na $[a, b]$.

Úloha 10. Vyslovte (a zdůvodněte) hypotézu o vztahu omezených a lipschitzovských funkcí. Jsou tam nějaké podmínky?

Úloha 11 ($\heartsuit$). Je nějaký vztah mezi lipschitzovskými a diferencovatelnými funkcemi na $[a, b]$?

2 Totálně omezené prostory

Definice 12. Necht (X, ρ) je metrický prostor, necht $\varepsilon > 0$. Řekneme, že $M \subset X$ je ε -sít' v X , jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje bod $y \in M$ takový, že $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Definice 13. Metrický prostor (X, ρ) se nazývá *totálně omezený*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε -sít'.

Poznámka 14. • Někdy se říká i *prekompaktní*.

- Definici lze potkat i takto: Z každého ε -pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Úloha 15. Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor omezený? Za jakých je totálně omezený?

Úloha 16 ($\star$). Uvažujte prostor l^2 . Jeho jednotková sféra je omezená množina. Ukažte, že není totálně omezená.

Úloha 17 (PRAVDA – NEPRAVDA).

ANO–NE Totálně omezená množina je omezená.

ANO–NE Omezená množina je totálně omezená.

Úloha 18 ($\otimes$). Ukažte, že uzávěr totálně omezeného prostoru je totálně omezený.

Úloha 19. Najděte příklad metrického prostoru, který je totálně omezený, ale není kompaktní.

(3.1) $\ a\ - \ b\ \leq \ a - b\ $	(16) posloupnosti, které mají na n -tém místě 1, jinde 0.
(3.2) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$	(18) Zapište s $\varepsilon/2$ sít'. Když ji naťouknete na ε -sít', co se stane?
(4) Problém vzniká s neomezenou derivací.	(11) Lagrangeova věta o střední hodnotě.
(7) Z definice.	